Devoir à rendre le mardi 5 novembre 2013

La rédaction devra être très précise et rigoureuse. Les copies illisibles ne seront pas corrigées.

Exercice 1. Soient $(E_1, \mathcal{A}_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables, et f une application de E_1 dans E_2.

a) Donner la définition de la *tribu image* de $\mathcal{A}_1$ par f, que l'on notera $\mathcal{F}$.

b) Vérifier que $\mathcal{F}$ est bien une tribu sur E_2.

c) Supposons que f est constante. Que vaut $\mathcal{F}$?

d) Dans cette question on suppose que E_2 contient au moins deux éléments. Soit A une partie de E_1, et a et b deux éléments distincts de E_2. On suppose que f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in A \\ b & \text{si } x \in A^c \end{cases}$$

i) Déterminer $\mathcal{F}$.

ii) Donner une condition nécessaire et suffisante sur l'ensemble E_2 et la tribu $\mathcal{A}_1$ pour que $\{f(B) : B \in \mathcal{A}_1\}$ soit une tribu sur E_2.

Exercice 2. Ensemble triadique de Cantor.
Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on rappelle que les notations $\frac{A}{3}$ et $A+2$ désignent respectivement les ensembles $\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A, x = \frac{y}{3}\}$ et $\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A, x = y+2\}$.
Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de parties de $\mathbb{R}$ définie par $F_0 = [0,1]$ et la relation de récurrence suivante :

$$F_{n+1} = \frac{F_n}{3} \cup \frac{2+F_n}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrer qu'il s'agit d'une suite décroissante de fermés.

b) Montrer que cette suite converge vers un compact K.

c) Calculer la mesure de Lebesgue de K, et en déduire que K est d'intérieur vide.

d) Caractériser les points de K.

e) Montrer que K est sans point isolé ($x \in K$ est dit isolé s'il possède un voisinage V tel que $V \cap K = \{x\}$).

f) Quel est le cardinal de K ?

Exercice 3. *Extrait de l'examen 2013.* Chaque réponse est à justifier (éventuellement à l'aide d'un exemple ou d'un contre-exemple).

a) Une partie borélienne bornée de $\mathbb{R}$ est-elle toujours de mesure de Lebesgue finie ?

b) Une partie compacte de $\mathbb{R}$ est-elle toujours de mesure de Lebesgue finie ?

c) Un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue finie peut-il être non borné ?

d) Un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle est-il nécessairement fermé ?

e) Un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ peut-il être de mesure de Lebesgue nulle ?

f) Un borélien de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide peut-il être de mesure de Lebesgue 2013 ?

g) Un borélien de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide peut-il être de mesure de Lebesgue nulle ?

h) Un borélien de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide est-il nécessairement de mesure de Lebesgue nulle ?

i) Un ouvert dense de $\mathbb{R}$ peut-il avoir une mesure de Lebesgue strictement inférieure à 2014 ?

j) Existe-t-il un ouvert dense de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue 2014 ?

k) Un ouvert de mesure de Lebesgue strictement inférieure à 10^{-2013} peut-il être dense dans $\mathbb{R}$?