Université Pierre & Marie Curie (Paris 6) — Licence de Mathématiques L3
UE LM364 – Intégration 1 — Année 2013–14
Groupe 5 – Carlo de Franchis

Devoir n°3

26 novembre 2013

Une heure et demie. Sans documents, sans calculatrices, sans portables.

Exercice 1. Questions de cours.

a) Énoncer le théorème de convergence monotone.

b) Énoncer le lemme de Fatou.

c) Énoncer le théorème de convergence dominée.

d) Démontrer le théorème de convergence monotone.

e) En utilisant le lemme de Fatou, donner une autre démonstration, plus courte, du théorème de convergence monotone.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}_+, \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+})$ une fonction mesurable positive. Montrer que $\int_X f d\mu = 0$ si et seulement si f est nulle μ-p.p.

b) Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ une fonction intégrable. Montrer que f est nulle μ-p.p. si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu = 0$.

Exercice 3. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

a) Montrer que :

$$\int_X |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) En déduire que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et intégrable pour la mesure de Lebesgue. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} \int_{[0,x]} f d\lambda, & \text{si } x \geq 0, \\ -\int_{[x,0]} f d\lambda, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.