Université Pierre & Marie Curie (Paris 6) — Licence de Mathématiques L3
UE LM364 – Intégration 1 — Année 2013–14
Groupe 5 – Carlo de Franchis

Devoir n°3

26 novembre 2013

Une heure et demie. Sans documents, sans calculatrices, sans portables.

Exercice 1. Questions de cours.

a) Énoncer le théorème de convergence monotone.

b) Énoncer le lemme de Fatou.

c) Énoncer le théorème de convergence dominée.

d) Démontrer le théorème de convergence monotone.

e) En utilisant le lemme de Fatou, donner une autre démonstration, plus courte, du théorème de convergence monotone.

Solution de l'exercice 1. Dans tout ce qui suit, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

a) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives de $(X, \mathcal{A})$ vers $(\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur X, sa limite f est une fonction mesurable positive et

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

b) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables positives de $(X, \mathcal{A})$ vers $(\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$. Alors $\liminf_n f_n$ est une fonction mesurable positive et

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu.$$

c) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ vers $(\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$, qui converge simplement vers f sur X. On suppose qu'il existe $g \in \mathscr{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $|f_n| \leq g$ pour tout n. Alors f et tous les f_n sont éléments de $\mathscr{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ et l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

Cela entraîne en particulier que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

d) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives de $(X, \mathcal{A})$ vers $(\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$. Comme (f_n) est croissante elle converge simplement sur X. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ sa limite. Montrons que f est mesurable. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\{f > a\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n > a\}$$

car f est la limite croissante de la suite (f_n). Comme f_n est mesurable, $\{f_n > a\} \in \mathcal{A}$ donc la stabilité de $\mathcal{A}$ par réunion dénombrable entraîne que $\{f > a\} \in \mathcal{A}$, ce qui montre que f est mesurable.
L'inégalité $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ entraîne alors par croissance de l'intégrale que

$$\int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu \leq \int_X f d\mu$$

donc les $\int_X f_n d\mu$ forment une suite croissante de $\overline{\mathbb{R}}_+$ majorée par $\int_X f d\mu$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

Pour montrer l'autre inégalité, il suffit de montrer que si φ est une fonction étagée positive inférieure à f alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X \varphi d\mu.$$

Cela est fait dans le polycopié, page 42, et a été expliqué en détails en cours lors de la 9e séance.

e) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives de $(X, \mathcal{A})$ vers $(\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$. On montre comme dans la preuve précédente qu'elle converge simplement sur X, que sa limite f est mesurable et vérifie $\int_X f d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$. D'autre part, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du lemme de Fatou (et en plus elle est croissante), donc

$$\int_X \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu.$$

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $\liminf_n = \lim f_n = f$. De même comme la suite croissante $(\int_X f_n d\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sa limite inférieure est égale à sa limite donc l'inégalié du lemme de Fatou se reformule en

$$\int_X f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu,$$

ce qui montre l'égalité et achève la preuve.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}_+, \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+})$ une fonction mesurable positive. Montrer que $\int_X f d\mu = 0$ si et seulement si f est nulle μ-p.p.

b) Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ une fonction intégrable. Montrer que f est nulle μ-p.p. si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu = 0$.

Solution de l'exercice 2.

a) Cette équivalence fait l'objet de la proposition 7.22 du polycopié de cours. Deux démonstrations différentes y sont proposées. Vous pouvez également lire la correction de la question c) de l'exercice 8 de la feuille de TD n°8, qui propose une démonstration légèrement différente.

b) Supposons que f est nulle μ-p.p. Soit $A \in \mathcal{A}$. Comme $|f|\mathbb{1}_A$ s'annule partout là où f s'annule, $|f|\mathbb{1}_A$ est nulle μ-p.p. Comme c'est une fonction positive et mesurable (car f est mesurable et $A \in \mathcal{A}$), l'équivalence de la question a) entraîne

$$\int_X |f|\mathbb{1}_A d\mu = 0.$$

Or $|\int_X f\mathbb{1}_A d\mu| \leq \int_X |f|\mathbb{1}_A d\mu$, donc $\int_X f\mathbb{1}_A d\mu = 0$, c'est-à-dire $\int_A f d\mu = 0$.
Réciproquement, supposons que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu = 0$. Posons

$$A_+ = \{f > 0\} \qquad \text{et} \qquad A_- = \{f \leq 0\}$$

Comme f est mesurable, A_+ et A_- sont éléments de $\mathcal{A}$ donc notre hypothèse entraîne que $\int_{A_+} f d\mu = \int_{A_-} f d\mu = 0$. Or $f\mathbb{1}_{A_+} = f^+$ et $f\mathbb{1}_{A_-} = -f^-$, donc

$$\int_{A_+} f d\mu = \int_X f\mathbb{1}_{A_+} d\mu = \int_X f^+ d\mu$$

et de même

$$\int_{A_-} f d\mu = \int_X f\mathbb{1}_{A_-} d\mu = -\int_X f^- d\mu.$$

La nullité de l'intégrale de f sur A_+ et A_- entraîne donc

$$\int_X f^+ d\mu = \int_X f^- d\mu = 0,$$

d'où $f^+ = 0$ μ-p.p. et $f^- = 0$ μ-p.p. d'après la question a) appliquée aux fonctions mesurables positives f^+ et f^-. Par conséquent $f = f^+ - f^-$ est nulle μ-p.p.

Exercice 3. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

a) Montrer que :

$$\int_X |f|\mathbb{1}_{\{|f|>n\}} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) En déduire que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et intégrable pour la mesure de Lebesgue. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} \int_{[0,x]} f d\lambda, & \text{si } x \geq 0, \\ -\int_{[x,0]} f d\lambda, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 3.

a) Posons $g_n = |f|\mathbb{1}_{\{|f|>n\}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. g_n est mesurable car f l'est, $|g_n| \le |f|$ et (g_n) converge simplement vers la fonction nulle. Comme $|f| \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (g_n), ce qui entraîne

$$\int_X |f|\mathbb{1}_{\{|f|>n\}} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question a), il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\int_X |f|\mathbb{1}_{\{|f|>n_\varepsilon\}} d\mu < \varepsilon/2$. Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) \le \delta$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\int_A |f| d\mu = \int_{A\cap\{|f|>n_\varepsilon\}} |f| d\mu + \int_{A\cap\{|f|\le n_\varepsilon\}} |f| d\mu \quad &\le \quad \int_{\{|f|>n_\varepsilon\}} |f| d\mu + \int_A n_\varepsilon \mathbb{1}_X d\mu \\
&= \quad \int_X |f|\mathbb{1}_{\{|f|>n_\varepsilon\}} d\mu + n_\varepsilon \mu(A) \\
&< \quad \frac{\varepsilon}{2} + n_\varepsilon \delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

c) Soit $\varepsilon > 0$. En appliquant le résultat de la question b) à l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on obtient un réel $\delta > 0$ tel que pour tous $x \le y$ vérifiant $|x - y| < \delta$ on ait $\int_{[x,y]} |f| d\lambda < \varepsilon$. Or pour tous $x \le y$ on a $F(y) - F(x) = \int_{[x,y]} f d\lambda$ car $\mathbb{1}_{[0,y]} - \mathbb{1}_{[0,x]} = \mathbb{1}_{[x,y]}$ μ-p.p. lorsque $0 \le x \le y$, et des égalités analogues ont lieu lorsque $x < 0 < y$ et $x \le y \le 0$. On en déduit que pour tous $x \le y$ vérifiant $|x - y| < \delta$ on a

$$|F(y) - F(x)| = \Big| \int_{[x,y]} f d\lambda \Big| \le \int_{[x,y]} |f| d\lambda < \varepsilon,$$

ce qui prouve que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.