Devoir n°1

8 octobre 2013

Une heure. Sans documents, sans calculatrices, sans portables.

Exercice 1. Questions de cours. *Les questions sont indépendantes.*

a) Soit E un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E. Donner les définitions de $\liminf A_n$ et de $\limsup A_n$.

b) Montrer que $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

c) Donner un exemple de suite strictement croissante de parties de $\mathbb{R}$, et calculer sa limite supérieure.

d) Soient A et B deux parties d'un ensemble X. Calculer $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et de $\mathbb{1}_B$.

e) L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est-il dénombrable ? Pourquoi ?

f) Soit X un ensemble. Qu'est-ce qu'une tribu sur X ?

g) Soient $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$ deux espaces mesurables. A quelle condition dit-on d'une fonction $f : (X,\mathcal{A}) \to (Y,\mathcal{B})$ qu'elle est mesurable ?

h) Soit $g : (X,\{\varnothing, X\}) \to (Y,\mathcal{P}(Y))$ une fonction mesurable. Que peut-on dire de g ?

Exercice 2. Soit E un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E.

a) Montrer que $\limsup A_n^c = (\liminf A_n)^c$.

b) A l'aide de l'égalité précédente, montrer que :

$$\limsup(A_n \triangle A_{n+1}) \subseteq \limsup A_n \setminus \liminf A_n$$

c) Démontrer que $\limsup(A_n \triangle A_{n+1}) = \limsup A_n \setminus \liminf A_n$.

Exercice 3. On considère deux ensembles quelconques A et B.

a) Montrer que si A et B ont même cardinal, alors $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ ont aussi même cardinal.

b) Donner une injection de A^B dans $\mathcal{P}(A\times B)$.

c) En déduire que $\operatorname{Card}\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \operatorname{Card}\mathbb{R}$.

d) (*bonus*) Quel est le cardinal de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?