Devoir n°1

8 octobre 2013

Une heure. Sans documents, sans calculatrices, sans portables.

Exercice 1. Questions de cours. *Les questions sont indépendantes.*

a) Soit E un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E. Donner les définitions de $\liminf A_n$ et de $\limsup A_n$.

b) Montrer que $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

c) Donner un exemple de suite strictement croissante de parties de $\mathbb{R}$, et calculer sa limite supérieure.

d) Soient A et B deux parties d'un ensemble X. Calculer $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et de $\mathbb{1}_B$.

e) L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est-il dénombrable ? Pourquoi ?

f) Soit X un ensemble. Qu'est-ce qu'une tribu sur X ?

g) Soient $(X,\mathcal{A})$ et $(Y,\mathcal{B})$ deux espaces mesurables. A quelle condition dit-on d'une fonction $f:(X,\mathcal{A})\to(Y,\mathcal{B})$ qu'elle est mesurable ?

h) Soit $g:(X,\{\varnothing,X\})\to(Y,\mathcal{P}(Y))$ une fonction mesurable. Que peut-on dire de g ?

Solution de l'exercice 1.

a) La limite inférieure de la suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la partie de E définie par :

$$\liminf A_n = \{x\in E : \exists N\in\mathbb{N} \text{ tel que } \forall n\geq N, x\in A_n\}.$$

La limite supérieure est définie par :

$$\limsup A_n = \{x\in E : \forall N\in\mathbb{N}, \exists n\geq N \text{ tel que } x\in A_n\}.$$

b) Soit $x\in\liminf A_n$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $x\in A_k$ pour tout $k\geq N$. L'ensemble $\{n\in\mathbb{N} : x\in A_n\}$ contient donc tous les entiers de l'intervalle $[N,+\infty[$. Par conséquent il est infini, ce qui signifie que $x\in\limsup A_n$.

c) Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n=[0,n]$. Cette suite de parties de $\mathbb{R}$ est strictement croissante. Elle est donc convergente, et sa limite supérieure vaut :

$$\limsup A_n = \lim A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \cup_{n\in\mathbb{N}}[0,n] = \mathbb{R}_+$$

d) Comme $A\setminus B = A\cap B^c$, on a $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_{A\cap B^c} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B^c} = \mathbb{1}_A(1-\mathbb{1}_B)$.

e) L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable car il a le cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\operatorname{Card}\mathcal{P}(\mathbb{N}) > \operatorname{Card}\mathbb{N}$.

f) Une tribu sur X est une classe $\mathcal{A}$ de parties de X qui vérifie les trois propriétés suivantes :

i) $X\in\mathcal{A}$

ii) Si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$

iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

g) f est dite mesurable si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A}$.

h) On suppose X non vide. Dans ce cas g est constante. En effet, si $x \in X$, alors $\{g(x)\}$ est élément de la tribu $\mathcal{P}(Y)$ donc

$$g^{-1}(\{g(x)\}) \in \{\varnothing, X\}.$$

Comme $g^{-1}(\{g(x)\})$ contient x, il n'est pas vide donc est égal à X. Donc $g(z) = g(x)$ pour tout $z \in X$.

Exercice 2. Soit E un ensemble et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E.

a) Montrer que $\limsup A_n^c = (\liminf A_n)^c$.

b) A l'aide de l'égalité précédente, montrer que :

$$\limsup(A_n \triangle A_{n+1}) \subseteq \limsup A_n \setminus \liminf A_n$$

c) Démontrer que $\limsup(A_n \triangle A_{n+1}) = \limsup A_n \setminus \liminf A_n$.

Solution de l'exercice 2.

a) Soit $x \in E$. D'après la définition de la limite supérieure d'une suite d'ensembles, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \limsup A_n^c &\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ tel que } x \in A_n^c \\ &\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ tel que } x \notin A_n \end{aligned}$$

Cette dernière expression est la négation de :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, x \in A_n,$$

qui traduit le fait que $x \in \liminf A_n$. On a donc $x \in \limsup A_n^c$ si et seulement si $x \notin \liminf A_n$, d'où l'égalité :

$$\limsup A_n^c = (\liminf A_n)^c.$$

b) Grâce à l'égalité de la question a), on a

$$\limsup A_n \setminus \liminf A_n = \limsup A_n \cap (\liminf A_n)^c = \limsup A_n \cap \limsup A_n^c.$$

Soit $x \in \limsup(A_n \triangle A_{n+1})$ et $N \in \mathbb{N}$. En utilisant la définition de la limite supérieure, on sait qu'il existe $n_0 \geq N$ tel que $x \in A_{n_0} \triangle A_{n_0+1}$. Or

$$x \in A_{n_0} \triangle A_{n_0+1} \Leftrightarrow x \in A_{n_0} \cap A_{n_0+1}^c \text{ ou } x \in A_{n_0}^c \cap A_{n_0+1}.$$

On en déduit qu'il existe un entier $n \geq N$ tel que $x \in A_n$ (par exemple $n = n_0$ ou $n = n_0 + 1$) et qu'il existe un autre entier $m \geq N$ tel que $x \in A_m^c$ (par exemple $m = n_0 + 1$ ou $m = n_0$).
Cela étant vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a prouvé que $x \in \limsup A_n$ et que $x \in \limsup A_n^c$, d'où l'inclusion

$$\limsup(A_n \triangle A_{n+1}) \subseteq \limsup A_n \cap \limsup A_n^c = \limsup A_n \setminus \liminf A_n.$$

c) On a déjà montré une inclusion à la question b). Montrons l'inclusion réciproque. Soit

$$x \in \limsup A_n \setminus \liminf A_n = \limsup A_n \cap \limsup A_n^c.$$

On veut montrer que $x \in \limsup(A_n \triangle A_{n+1})$. Fixons donc un entier $N \in \mathbb{N}$, et remarquons que :
- Comme $x \in \limsup A_n$, il existe $n_1 > N$ tel que $x \in A_{n_1}$.
- Comme $x \in \limsup A_n^c$, il existe $n_2 > n_1$ tel que $x \in A_{n_2}^c$.

Entre n_1 et n_2, il doit forcément exister un entier n_0 tel que $x \in A_{n_0}$ et $x \notin A_{n_0+1}$. Montrons cela : l'ensemble

$$B = \{k \in \mathbb{N} : k < n_2, x \in A_k\}$$

est non vide (il contient n_1) et majoré (par n_2), donc il admet un maximum n_0. Comme $n_0 \in B$, $x \in A_{n_0}$ et $n_0 < n_2$, donc $n_0 + 1 \leq n_2$. Si $n_0 + 1 = n_2$, alors $x \notin A_{n_0+1}$, et si $n_0 + 1 < n_2$ alors $x \notin A_{n_0+1}$ par maximalité de n_0. Dans les deux cas, on a :

$$x \in A_{n_0} \setminus A_{n_0+1} \subseteq A_{n_0} \triangle A_{n_0+1}.$$

Comme $n_0 \geq n_1 > N$, on a bien prouvé l'existence d'un entier $n \geq N$ vérifiant $x \in A_n \triangle A_{n+1}$. Donc $x \in \limsup(A_n \triangle A_{n+1})$ d'où l'inclusion $\limsup A_n \setminus \liminf A_n \subseteq \limsup(A_n \triangle A_{n+1})$, et par conséquent

$$\limsup(A_n \triangle A_{n+1}) = \limsup A_n \setminus \liminf A_n.$$

Exercice 3. On considère deux ensembles quelconques A et B.

a) Montrer que si A et B ont même cardinal, alors $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$ ont aussi même cardinal.

b) Donner une injection de A^B dans $\mathcal{P}(A \times B)$.

c) En déduire que $\operatorname{Card} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \operatorname{Card} \mathbb{R}$.

d) (*bonus*) Quel est le cardinal de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Solution de l'exercice 3.

a) Supposons que A et B ont le même cardinal. Il existe une bijection $\varphi : A \to B$. Soit $\Phi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ l'application qui à toute partie $X \subseteq A$ associe son image $\varphi(X) \subseteq B$ par φ. Montrons que Φ est bijective :
- injectivité : si $\Phi(X) = \Phi(Y)$ alors $\varphi(X) = \varphi(Y)$ donc $X = \varphi^{-1}(\varphi(X)) = \varphi^{-1}(\varphi(Y)) = Y$. Ici φ^{-1} désigne l'application réciproque de φ, qui existe parce que φ est bijective.
- surjectivité : soit $Y \in B$. Alors $Y = \varphi(\varphi^{-1}(Y)) = \Phi(\varphi^{-1}(Y))$.

Φ est donc une bijection de $\mathcal{P}(A)$ sur $\mathcal{P}(B)$, d'où :

$$\operatorname{Card} \mathcal{P}(A) = \operatorname{Card} \mathcal{P}(B).$$

b) Soit $\Phi : A^B \to \mathcal{P}(A \times B)$ l'application qui à tout $f \in A^B$ associe la partie :

$$\{(f(x), x) : x \in B\} \subseteq A \times B$$

Montrons que Φ est injective. Soient f et g deux éléments de A^B tels que $\Phi(f) = \Phi(g)$. Soit $x \in B$:

$$(f(x), x) \in \Phi(f) = \Phi(g) = \{(g(y), y) : y \in B\},$$

donc il existe $y \in B$ tel que $(f(x), x) = (g(y), y)$, c'est-à-dire $f(x) = g(y)$ et $x = y$, donc $f(x) = g(x)$. Ceci étant vrai $\forall x \in B$, on a $f = g$. Donc Φ est injective.

c) En appliquant le résultat de la question b) avec $A = B = \mathbb{N}$, on obtient une injection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$, ce qui montre que $\operatorname{Card} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq \operatorname{Card} \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$. Or $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, donc d'après la question a) $\operatorname{Card} \mathcal{P}(\mathbb{N}^2) = \operatorname{Card} \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \operatorname{Card} \mathbb{R}$. On en déduit que

$$\operatorname{Card} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq \operatorname{Card} \mathbb{R}.$$

D'autre part, comme $\{0,1\} \subseteq \mathbb{N}$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ donc

$$\operatorname{Card} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \geq \operatorname{Card}\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \operatorname{Card} \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \operatorname{Card} \mathbb{R}.$$

d'où l'égalité demandée.

d) Soient A, B et C trois ensembles. On va utiliser les deux lemmes suivants :
Lemme 1 : si A et B sont en bijection, alors A^C et B^C le sont aussi.
Preuve : soit $\varphi : A \to B$ bijective. L'application $\Phi : A^C \to B^C$ définie, pour $f \in A^C$, par $\Phi(f) = \varphi \circ f$, est une bijection.
Lemme 2 : $A^{B\times C}$ et $(A^B)^C$ sont en bijection.
Preuve : Soit $\Phi : A^{B\times C} \to (A^B)^C$ la fonction définie par :

$$\Phi(f) = \left(\begin{array}{ccc} C & \to & A^B \\ c & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} B & \to & A \\ b & \mapsto & f(b,c) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Φ est une bijection. En effet, sa réciproque est donnée par :

$$\begin{array}{llll} \Psi : & (A^B)^C & \to & A^{B\times C} \\ & G & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} B\times C & \to & A \\ (b,c) & \mapsto & [G(c)](b) \end{array} \right) \end{array}$$

Il est clair que Φ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre, ce qui montre la bijectivité de Φ.
Remarque : ces deux lemmes font l'objet de l'exercice 10 de la feuille n°1. Vous pouvez vous reporter à la solution de cet exercice [1] pour plus de commentaires.
Comme $\operatorname{Card} \mathbb{R} = \operatorname{Card}\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, le lemme 1 entraîne que $\operatorname{Card} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \operatorname{Card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. En appliquant le lemme 2 avec $A = \{0,1\}$ et $B = C = \mathbb{N}$, on obtient :

$$\operatorname{Card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} = \operatorname{Card}\{0,1\}^{\mathbb{N}^2} = \operatorname{Card} \mathcal{P}(\mathbb{N}^2).$$

Or d'après la question a), comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable ce dernier cardinal vaut $\operatorname{Card} \mathcal{P}(\mathbb{N})$, c'est-à-dire $\operatorname{Card} \mathbb{R}$, d'où :

$$\operatorname{Card} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \operatorname{Card} \mathbb{R}.$$

1. `http://perso.ens-lyon.fr/guillaume.cebron/LM364-TD1_a_voir.pdf`