

Devoir n°3

10 Avril 2013

Durée : 1h

Tous les documents, ainsi que les téléphones, sont interdits.

Exercice 1. Questions de cours

- Soit X une v.a. de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.
 - Quel est l'ensemble des valeurs possibles de X ?
 - Pour $k \in \mathbb{N}$, que vaut $\mathbb{P}(X = k)$?
- Soit X une v.a. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
 - Quel est l'ensemble des valeurs possibles de X ?
 - Pour $k \in \mathbb{N}$, que vaut $\mathbb{P}(X = k)$?
- Soit X une v.a. à valeurs dans \mathbb{N}
 - A quelle condition dit-on que X admet une espérance ?
 - Dans ce cas, que vaut l'espérance de X ?
 - Qu'est-ce que la fonction génératrice de la loi de X ?
- Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon de la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
 - A quelle condition dit-on que φ est un estimateur sans biais de λ ?
 - Qu'est-ce que la moyenne empirique de l'échantillon (X_1, \dots, X_n) ?
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, continue par morceaux, et X une v.a.r.
 - A quelle condition dit-on que la loi de X admet f pour densité ?
 - Dans ce cas, que vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f$?
 - Qu'est-ce que la fonction de répartition de la loi de X ?

Exercice 2. On considère une loi de probabilité p_θ où θ est un paramètre inconnu dans $]0, 1[$, telle que

$$p_\theta(-1) = \theta \text{ et } p_\theta(2) = 1 - \theta$$

Une v.a.r. de loi p_θ prend donc -1 ou 2 comme valeurs. Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon de la loi p_θ .

- Calculer $\mathbb{E}_\theta(X_1)$
- En déduire $\mathbb{E}_\theta(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$ et trouver un estimateur sans biais de θ .

Exercice 3. Les deux questions sont indépendantes.

- Soit X une v.a. suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Calculer l'espérance et la variance de X .
- Soit $a < b$ deux réels, et X une v.a. suivant une loi dont la densité de probabilité $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est définie par

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

Calculer l'espérance et la variance de X .