Devoir n°3

10 Avril 2013

Durée : 1h

Corrigé

Exercice 1. *Questions de cours*

a) X est à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{P}(X = k)$ est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

b) X est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\mathbb{P}(X = k)$ est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

c) On dit que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $n\mathbb{P}(X = n)$ converge. Dans ce cas, l'espérance de X est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n)$$

La fonction génératrice de la loi de X, notée g_X, est la fonction définie sur le segment $[-1, 1]$ par

$$g_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} s^n \mathbb{P}(X = n)$$

d) On dit que φ est un estimateur sans biais de λ si et seulement si $\mathbb{E}_\lambda(\varphi(X_1, \ldots, X_n)) = \lambda$. La moyenne empirique de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ est définie par

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

e) On dit que la loi de X admet f pour densité si et seulement si pour tous réels a et b tels que $a < b$ on a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f$$

Dans ce cas, $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$. La fonction de répartition de la loi de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Exercice 2.

a) X_1 est une v.a.r. de loi p_θ donc son espérance est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta(X_1) &= -1 \times p_\theta(-1) + 2 \times p_\theta(2)\\ &= -\theta + 2(1-\theta)\\ &= 2 - 3\theta\end{aligned}$$

b) Comme les v.a. X_i sont identiquement distribuées, elles ont toutes la même espérance, calculée à la question précédente. Par linéarité de l'espérance, on obtient alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\theta(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) &= \mathbb{E}_\theta(X_1) + \mathbb{E}_\theta(X_2) + \cdots + \mathbb{E}_\theta(X_n)\\ &= n(2-3\theta)\end{aligned}$$

On déduit de cette égalité que $\mathbb{E}(\overline{X}) = \mathbb{E}(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}) = 2 - 3\theta$, d'où $\mathbb{E}(\frac{2-\overline{X}}{3}) = \theta$. On en déduit que $\frac{2-\overline{X}}{3}$ est un estimateur sans biais de θ.

Exercice 3.

a) L'espérance de X est donnée par

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

et la variance de X est donnée par

$$V(X) = (0-p)^2 \times (1-p) + (1-p)^2 \times p = p(1-p).$$

b) Comme les fonctions continues $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto |x^2|$ sont bornées sur le segment $[a,b]$, les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^2| f_X(x)dx$ sont convergentes, donc X possède des moments d'ordre 1 et 2. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx\\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)}\\ &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx\\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}\\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3}\end{aligned}$$

d'où l'on déduit la variance de X :

$$\begin{aligned}V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 &= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4}\\ &= \frac{a^2-2ab+b^2}{12}\\ &= \frac{(a-b)^2}{12}\end{aligned}$$