Université Pierre & Marie Curie (Paris 6) — Licence de Mathématiques L2
UE LM231 – Probabilités et statistiques — Année 2012–13
Groupe 1 – Carlo de Franchis

Devoir n°2

01 Mars 2013
Durée : 1 heure

Exercice 1. Une urne contient r boules rouges et n boules noires. On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne. Sachant que la deuxième boule est rouge, quelle est la probabilité que la première soit noire ?

Exercice 2.

a) On lance un dé équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Donner la loi et l'espérance de X.

b) On lance un dé truqué dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. La probabilité d'obtenir la face k est proportionnelle à k. Soit Y la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Donner la loi et l'espérance de Y.

c) On lance maintenant deux dés équilibrés dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires représentant les résultats obtenus sur chacun des dés. On définit $M = \min(X_1, X_2)$ et $N = \max(X_1, X_2)$.
   - Donner la loi de M et son espérance.
   - Exprimer $M + N$ en fonction de X_1 et X_2, en déduire l'espérance de N.
   - Exprimer MN en fonction de X_1 et X_2, en déduire l'espérance de MN.
   - Les variables aléatoires M et N sont-elles indépendantes ?

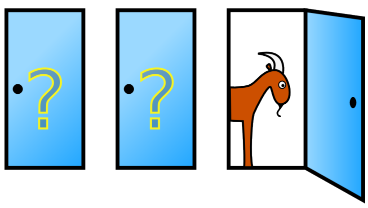
Exercice 3. On considère une population de $n \in \mathbb{N}^*$ individus. Ceux-ci sont atteints par une maladie M avec une probabilité $p \in]0,1[$. Au lieu de faire une analyse de sang pour chaque individu, on essaie une autre méthode : on fait d'abord une analyse sur un mélange du sang des n individus. Si le résultat est négatif, on conclut que tous les individus sont sains. S'il est positif, on effectue l'analyse sur chaque individu séparément. Soient X_n la variable aléatoire égale au nombre d'analyses de sang effectuées et $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

a) Donner la loi de Y_n et son espérance.

b) Montrer que $\mathbb{E}(Y_n) < 1$ équivaut à $f(n) > 0$ avec $f : x \mapsto x \ln(1-p) + \ln x$.

c) (*facultatif*) Pour $p = 0.15$, montrer que cette nouvelle méthode de dépistage est plus économique (i.e. nécessite moins d'analyses) si et seulement si $n \in \{2, 3, \cdots, 17\}$.

Exercice 4. Dans un jeu télévisé, un candidat doit choisir une porte parmi trois. Ce qui se trouve derrière la porte choisie lui sera offert. L'une des portes cache une voiture, et les deux autres cachent chacune une chèvre. On suppose que le candidat préfère la voiture. Le jeu se déroule de la façon suivante : le candidat choisit une porte, puis le présentateur (qui sait où se trouve la voiture) choisit parmi les deux portes restantes une porte qui cache une chèvre, et l'ouvre.



Il demande ensuite au candidat s'il veut ou non modifier son choix. Le candidat a-t-il intérêt à modifier son choix ?