Devoir n°2

01 Mars 2013

Durée : 1 heure

Exercice 1. Une urne contient r boules rouges et n boules noires. On tire successivement et sans remise deux boules de cette urne. Sachant que la deuxième boule est rouge, quelle est la probabilité que la première soit noire ?

Solution de l'exercice 1. L'urne contient $n+r$ boules, que l'on peut supposer numérotées de 1 à $n+r$. L'ensemble des résultats possibles de l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé est

$$\Omega = \{(a,b) \in \{1,\dots,n+r\}^2, a \neq b\}.$$

Son cardinal vaut $(n+r)(n+r-1)$. On munit Ω de la probabilité uniforme. Soit A l'évènement « la première boule est noire » et B l'évènement « la deuxième boule est rouge ». L'énoncé demande de calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A|B)$. Comme il y a r boules rouges, et qu'une fois une boule choisie il reste $(n+r-1)$ autres boules, le nombre de couple (a,b) de Ω dont l'élément b correspond à une boule rouge est $|B| = r(n+r-1)$. Comme la probabilité choisie est uniforme on obtient

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{r(n+r-1)}{(n+r)(n+r-1)} = \frac{r}{n+r}$$

L'évènement $A \cap B$ est composé des couples (a,b) tels que a est une boule noire et b est une boule rouge. Il y en a $n \times r$, donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{nr}{(n+r)(n+r-1)}$$

Finalement la probabilité demandée vaut

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{nr}{(n+r)(n+r-1)} \frac{n+r}{r} = \frac{n}{n+r-1}$$

Exercice 2.

a) On lance un dé équilibré dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. Soit X la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Donner la loi et l'espérance de X.

b) On lance un dé truqué dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. La probabilité d'obtenir la face k est proportionnelle à k. Soit Y la variable aléatoire égale au résultat obtenu. Donner la loi et l'espérance de Y.

c) On lance maintenant deux dés équilibrés dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires représentant les résultats obtenus sur chacun des dés. On définit $M = \min(X_1, X_2)$ et $N = \max(X_1, X_2)$.
   - Donner la loi de M et son espérance.
   - Exprimer $M + N$ en fonction de X_1 et X_2, en déduire l'espérance de N.
   - Exprimer MN en fonction de X_1 et X_2, en déduire l'espérance de MN.
   - Les variables aléatoires M et N sont-elles indépendantes ?

Solution de l'exercice 2.

a) X est à valeurs dans $\{1, \cdots, 6\}$ et suit une loi uniforme puisque le dé est équilibré : $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6}$ pour $k \in \{1, \cdots, 6\}$. Son espérance vaut $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(X = k) = \frac{7}{2}$.

b) Y est à valeurs dans $\{1, \cdots, 6\}$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in \{1, \cdots, 6\}$, $\mathbb{P}(Y = k) = \alpha k$. Puisque $\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(Y = k) = 1$, on obtient $\alpha = \frac{1}{21}$.
L'espérance vaut $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{k^2}{21} = \frac{13}{3}$.

c) $M = \min(X_1, X_2)$ est à valeurs dans $\{1, \cdots, 6\}$ et, pour $k \in \{1, \cdots, 6\}$, on peut écrire l'évènement $(M = k)$ sous la forme d'une union d'ensembles disjoints :

$$(M = k) = (X_1 = k \cap X_2 = k) \cup (X_1 = k \cap X_2 > k) \cup (X_1 > k \cap X_2 = k)$$

Puisque X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes, il vient :

$$\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = k) + \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 > k) + \mathbb{P}(X_1 > k)\mathbb{P}(X_2 = k)$$

X_1 et X_2 suivent la loi uniforme de la question a) : $\mathbb{P}(X_i = k) = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}(X_i > k) = \sum_{k'=k+1}^{6} \mathbb{P}(X_i = k') = \frac{6-k}{6}$. On obtient finalement :

$$\mathbb{P}(M = k) = \frac{13 - 2k}{36}$$

L'espérance vaut $\mathbb{E}(M) = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}(M = k) = \frac{91}{36}$. On a $M + N = X_1 + X_2$ et $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \mathbb{E}(X)$. D'où $\mathbb{E}(N) = 2\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(M) = \frac{161}{36}$. On a également $MN = X_1X_2$ et $\mathbb{E}(X_1X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$ puisque X_1 et X_2 sont indépendantes. Donc $\mathbb{E}(MN) = \mathbb{E}(X)^2 = \frac{49}{4}$. Comme $\mathbb{E}(MN) \neq \mathbb{E}(M)\mathbb{E}(N)$, les variables aléatoires M et N ne sont pas indépendantes.

Exercice 3. On considère une population de $n \in \mathbb{N}^*$ individus. Ceux-ci sont atteints par une maladie M avec une probabilité $p \in]0, 1[$. Au lieu de faire une analyse de sang pour chaque individu, on essaie une autre méthode : on fait d'abord une analyse sur un mélange du sang des n individus. Si le résultat est négatif, on conclut que tous les individus sont sains. S'il est positif, on effectue l'analyse sur chaque individu séparément. Soient X_n la variable aléatoire égale au nombre d'analyses de sang effectuées et $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

a) Donner la loi de Y_n et son espérance.

b) Montrer que $\mathbb{E}(Y_n) < 1$ équivaut à $f(n) > 0$ avec $f : x \mapsto x\ln(1-p) + \ln x$.

c) (*facultatif*) Pour $p = 0.15$, montrer que cette nouvelle méthode de dépistage est plus économique (i.e. nécessite moins d'analyses) si et seulement si $n \in \{2, 3, \cdots, 17\}$.

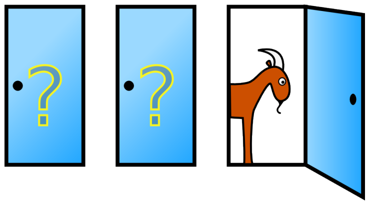
Solution de l'exercice 3.

a) X_n est à valeurs dans $\{1, n+1\}$. De plus, l¿évènement $(X_n = 1) = (Y_n = \frac{1}{n})$ équivaut à dire que tous les individus sont sains : $\mathbb{P}(Y_n = \frac{1}{n}) = (1-p)^n$. Comme Y_n ne prend que deux valeurs, on a directement $\mathbb{P}(Y_n = 1 + \frac{1}{n}) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = \frac{1}{n}) = 1 - (1-p)^n$ et $\mathbb{E}(Y_n) = 1 + \frac{1}{n} - (1-p)^n$.

b) $\mathbb{E}(Y_n) < 1 \Leftrightarrow (1-p)^n > \frac{1}{n} \Leftrightarrow n\ln(1-p) + \ln n > 0$.

c) La nouvelle méthode de dépistage est plus économique si et seulement si $f(n) > 0$. Etudions les variations de f sur $\mathbb{R}^{*+}$. La fonction est dérivable et $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{1}{\ln(1-p)} (= a_p)$. f est strictement croissante sur $]0, a_p[$ et strictement décroissante sur $]a_p, +\infty[$. Pour $p = 0.15$, on calcule $a_p \simeq 6.15$ et $f(1) \simeq -0.16 < 0$, $f(2) \simeq 0.36 > 0$, $f(17) \simeq 0.07 > 0$, $f(18) \simeq -0.03 < 0$. D'où la conclusion.

Exercice 4. Dans un jeu télévisé, un candidat doit choisir une porte parmi trois. Ce qui se trouve derrière la porte choisie lui sera offert. L'une des portes cache une voiture, et les deux autres cachent chacune une chèvre. On suppose que le candidat préfère la voiture. Le jeu se déroule de la façon



suivante : le candidat choisit une porte, puis le présentateur (qui sait où se trouve la voiture) choisit parmi les deux portes restantes une porte qui cache une chèvre, et l'ouvre.
Il demande ensuite au candidat s'il veut ou non modifier son choix. Le candidat a-t-il intérêt à modifier son choix ?

Solution de l'exercice 4. Notons a, b et c les trois portes, et supposons que la voiture est derrière la porte a. Seul le présentateur sait cela. L'expérience aléatoire correspondant au jeu décrit dans l'énoncé consiste à demander au candidat de choisir une porte au hasard parmi a, b et c, puis à demander au présentateur de choisir parmi les deux portes restantes une porte différente de a. On peut donc décrire tout résultat de l'expérience par un couple (x, y), où x désigne la porte choisie par le candidat, et y celle ouverte par le présentateur. L'ensemble des résultats possibles est alors :

$$\Omega = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, b)\}$$

En effet, si le candidat choisit initialement la porte a, qui cache la voiture, le présentateur aura deux possibilités : il peut ouvrir la porte b ou la porte c, d'où le deux résultats (a, b) et (a, c). Par contre si le candidat choisit initialement la porte b, le présentateur ne pourra ouvrir que la porte c, conduisant au résultat (b, c). De même, si le candidat choisit c, le présentateur devra ouvrir b ce qui donnera (c, b). Comme le candidat ne dispose initialement d'aucune information, on peut supposer que son choix est fait au hasard, c'est-à-dire que la variable aléatoire égale à la porte qu'il choisit (donc à valeurs dans $\{a, b, c\}$) suit une loi uniforme. Cela signifie que l'on munit Ω d'une probabilité $\mathbb{P}$ qui vérifie :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{(a, b), (a, c)\}) &= \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(\{(b, c)\}) &= \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}(\{(c, b)\}) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Pour déterminer si le candidat a intérêt ou non à modifier son choix, envisageons les deux cas et calculons à chaque fois la probabilité de gagner la voiture.

– 1$^{\text{er}}$ cas : le candidat conserve son choix. Les résultats de Ω qui le font gagner sont alors (a, b) et (a, c). Or on a vu que $\mathbb{P}(\{(a, b), (a, c)\}) = \frac{1}{3}$, donc la probabilité de gagner est $\frac{1}{3}$.
– 2$^{\text{e}}$ cas : le candidat modifie son choix. Les résultats de Ω qui le font gagner sont alors (b, c) et (c, b). La probabilité de gagner est alors

$$\mathbb{P}(\{(b, c), (c, b)\}) = \mathbb{P}(\{(b, c)\}) + \mathbb{P}(\{(c, b)\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

La probabilité est plus élevée dans le deuxième cas. Le candidat a donc intérêt à modifier son choix.