Université Pierre & Marie Curie (Paris 6) — Licence de Mathématiques L3
UE LM364 – Intégration 1 — Année 2012–13
Groupe 3 – Carlo de Franchis

Devoir n°3

6 Décembre 2012
Durée : 1h

Tous les documents, ainsi que les téléphones, sont interdits. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. Montrer que $\int_X f d\mu = 0$ si et seulement si f est nulle μ-p.p.

b) Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ une fonction intégrable. Montrer que f est nulle μ-p.p. si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu = 0$.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. On pose pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Montrer que ν est une mesure sur $\mathcal{A}$.

Exercice 3. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

a) Montrer que :

$$\int_X |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) En déduire que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et intégrable pour la mesure de Lebesgue. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} \int_{[0,x]} f d\lambda, & \text{si } x \geq 0, \\ -\int_{[x,0]} f d\lambda, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.