Devoir n°3

6 Décembre 2012
Durée : 1h

Tous les documents, ainsi que les téléphones, sont interdits. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. Montrer que $\int_X f d\mu = 0$ si et seulement si f est nulle μ-p.p.

b) Soit $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ une fonction intégrable. Montrer que f est nulle μ-p.p. si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu = 0$.

Solution de l'exercice 1.

a) Cette équivalence fait l'objet de la proposition 7.22 du polycopié de cours. Deux démonstrations différentes y sont proposées. Vous pouvez également lire la correction de la question c) de l'exercice 8 de la feuille de TD n°8, qui propose une démonstration légèrement différente.

b) Supposons que f est nulle μ-p.p. Soit $A \in \mathcal{A}$. Comme $|f|\mathbb{1}_A$ s'annule partout là où f s'annule, $|f|\mathbb{1}_A$ est nulle μ-p.p. Comme c'est une fonction positive et mesurable (car f est mesurable et $A \in \mathcal{A}$), l'équivalence de la question a) entraîne

$$\int_X |f|\mathbb{1}_A d\mu = 0.$$

Or $|\int_X f\mathbb{1}_A d\mu| \leq \int_X |f|\mathbb{1}_A d\mu$, donc $\int_X f\mathbb{1}_A d\mu = 0$, c'est-à-dire $\int_A f d\mu = 0$.
Réciproquement, supposons que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu = 0$. Posons

$$A_+ = \{f > 0\} \qquad \text{et} \qquad A_- = \{f \leq 0\}$$

Comme f est mesurable, A_+ et A_- sont éléments de $\mathcal{A}$ donc notre hypothèse entraîne que $\int_{A_+} f d\mu = \int_{A_-} f d\mu = 0$. Or $f\mathbb{1}_{A_+} = f^+$ et $f\mathbb{1}_{A_-} = -f^-$, donc

$$\int_{A_+} f d\mu = \int_X f\mathbb{1}_{A_+} d\mu = \int_X f^+ d\mu$$

et de même

$$\int_{A_-} f d\mu = \int_X f\mathbb{1}_{A_-} d\mu = -\int_X f^- d\mu.$$

La nullité de l'intégrale de f sur A_+ et A_- entraîne donc

$$\int_X f^+ d\mu = \int_X f^- d\mu = 0,$$

d'où $f^+ = 0$ μ-p.p. et $f^- = 0$ μ-p.p. d'après la question a) appliquée aux fonctions mesurables positives f^+ et f^-. Par conséquent $f = f^+ - f^-$ est nulle μ-p.p.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive. On pose pour tout $A \in \mathcal{A}$

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Montrer que ν est une mesure sur $\mathcal{A}$.

Solution de l'exercice 2. Il s'agit de la démonstration du corollaire 7.18 du polycopié de cours. Remarquez que la preuve de la σ-additivité de ν repose sur l'échange entre somme et intégrale, rendu possible par le corollaire du théorème de convergence monotone concernant les séries (proposition 7.17 du cours). Il faut impérativement le mentionner.

Exercice 3. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

a) Montrer que :

$$\int_X |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) En déduire que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon.$$

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et intégrable pour la mesure de Lebesgue. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} \int_{[0,x]} f d\lambda, & \text{si } x \geq 0, \\ -\int_{[x,0]} f d\lambda, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 3.

a) Posons $g_n = |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. g_n est mesurable car f l'est, $|g_n| \leq |f|$ et (g_n) converge simplement vers la fonction nulle. Comme $|f| \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (g_n), ce qui entraîne

$$\int_X |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question a), il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\int_X |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n_\varepsilon\}} d\mu < \varepsilon/2$. Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{2n_\varepsilon}$. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) \leq \delta$, on a alors :

$$\begin{aligned} \int_A |f| d\mu = \int_{A\cap\{|f|>n_\varepsilon\}} |f| d\mu + \int_{A\cap\{|f|\leq n_\varepsilon\}} |f| d\mu &\leq \int_{\{|f|>n_\varepsilon\}} |f| d\mu + \int_A n_\varepsilon \mathbb{1}_X d\mu \\ &= \int_X |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n_\varepsilon\}} d\mu + n_\varepsilon \mu(A) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + n_\varepsilon \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

c) Soit $\varepsilon > 0$. En appliquant le résultat de la question b) à l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on obtient un réel $\delta > 0$ tel que pour tous $x \leq y$ vérifiant $|x-y| < \delta$ on ait $\int_{[x,y]} |f| d\lambda < \varepsilon$. Or pour tous $x \leq y$ on a $F(y) - F(x) = \int_{[x,y]} f d\lambda$ car $\mathbb{1}_{[0,y]} - \mathbb{1}_{[0,x]} = \mathbb{1}_{[x,y]}$ μ-p.p. lorsque $0 \leq x \leq y$, et des égalités analogues ont lieu lorsque $x < 0 < y$ et $x \leq y \leq 0$. On en déduit que pour tous $x \leq y$ vérifiant $|x-y| < \delta$ on a

$$|F(y) - F(x)| = \Big| \int_{[x,y]} f d\lambda \Big| \leq \int_{[x,y]} |f| d\lambda < \varepsilon,$$

ce qui prouve que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.