

## Devoir n°2

15 Novembre 2012

Durée : 1h

*Tous les documents, ainsi que les calculatrices, sont interdits. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

**Exercice 1.** Soit  $X$  un ensemble. Quelle est la tribu  $\sigma(\mathcal{S})$  engendrée par la classe  $\mathcal{S}$  des singletons de  $X$ ? Le démontrer.

**Exercice 2.** Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable, et  $f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  une fonction.

- A quelle condition dit-on que  $f$  est étagée?
- Supposons que  $E$  soit un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . A quelle condition dit-on que  $f$  est réglée?
- Donner un exemple de fonction étagée qui n'est pas réglée. Montrer que cette fonction est étagée, puis qu'elle n'est pas réglée.

**Exercice 3.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques, et  $f : X \longrightarrow Y$  une fonction. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- L'image réciproque par  $f$  de tout ouvert de  $Y$  est un ouvert de  $X$ .
- L'image réciproque par  $f$  de tout fermé de  $Y$  est un fermé de  $X$ .