Devoir n°2

15 Novembre 2012

Durée : 1h

Tous les documents, ainsi que les calculatrices, sont interdits. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. Soit X un ensemble. Quelle est la tribu $\sigma(\mathcal{S})$ engendrée par la classe $\mathcal{S}$ des singletons de X ? Le démontrer.

Solution de l'exercice 1. Soit $\mathcal{A}$ la classe des parties dénombrables ou codénombrables de X :

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(X) : A \text{ dénombrable ou } {}^cA \text{ dénombrable } \}.$$

On va montrer que $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$.

- Montrons que $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$. Soit $A \in \mathcal{A}$.
  - 1er cas : A est dénombrable. On peut écrire

    $$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{a_k\},$$

    les a_k étant des éléments de X. Le singleton $\{a_k\}$ est dans $\mathcal{S}$, donc dans $\sigma(\mathcal{S})$, pour tout k et comme la tribu $\sigma(\mathcal{S})$ est stable par union dénombrable, $A \in \sigma(\mathcal{S})$.
  - 2e cas : A est codénombrable. Alors ${}^cA$ est dénombrable, donc d'après le premier cas il est dans $\sigma(\mathcal{S})$. Comme la tribu $\sigma(\mathcal{S})$ est stable par passage au complémentaire, $A \in \sigma(\mathcal{S})$.

  Dans les deux cas on a $A \in \sigma(\mathcal{S})$. Cela étant vrai pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a montré que $\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$.
- Montrons que $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}$. Tout singleton est fini donc dénombrable, donc $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$. Pour en déduire que $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}$ il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu. Montrons donc que $\mathcal{A}$ est une tribu.
  - $\emptyset$ est dénombrable donc $\mathcal{A}$ contient $\emptyset$.
  - Si $A \in \mathcal{A}$ alors A ou ${}^cA$ est dénombrable, donc ${}^c({}^cA)$ ou ${}^cA$ est dénombrable, donc ${}^cA \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire.
  - Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$. S'ils sont tous dénombrables, alors $\cup_n A_n$ est dénombrable en tant qu'union dénombrable d'ensembles dénombrables. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que A_{n_0} soit codénombrable, alors :

    $${}^c\left(\bigcup_n A_n\right) = \bigcap_n {}^cA_n \subseteq {}^cA_{n_0}$$

    est dénombrable donc $\cup_n A_n$ est codénombrable. Dans les deux cas, $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$.

  $\mathcal{A}$ est donc une tribu, d'où l'inclusion $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{A}$, ce qui achève la preuve.

Exercice 2. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et $f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction.

a) A quelle condition dit-on que f est étagée ?

b) Supposons que E soit un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. A quelle condition dit-on que f est réglée ?

c) Donner un exemple de fonction étagée qui n'est pas réglée. Montrer que cette fonction est étagée, puis qu'elle n'est pas réglée.

Solution de l'exercice 2.

a) f est étagée si et seulement si elle est mesurable et l'ensemble $f(E)$ est fini.

b) $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est réglée si et seulement si elle est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

c) Prenons $E = [0, 1]$ muni de la tribu $\mathcal{B}([0, 1])$ des boréliens de $[0, 1]$, et $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$.

– Montrons que f est étagée. Tout d'abord, f est une fonction indicatrice donc elle ne prend que 2 valeurs (0 et 1). Il suffit donc de montrer que f est mesurable. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est une union dénombrable de singletons de $[0, 1]$. Or les singletons sont fermés donc boréliens. Donc $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est un borélien de $[0, 1]$. Cela entraîne, grâce au lemme suivant, que f est mesurable donc étagée.

Lemme : Si $(E, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et $A \in \mathcal{A}$, alors $\mathbb{1}_A : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ est mesurable.

Preuve : Soit $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. L'image réciproque de B par $\mathbb{1}_A$ peut prendre quatre valeurs seulement :

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \notin B \text{ et } 1 \notin B \\ A & \text{si } 0 \notin B \text{ et } 1 \in B \\ {}^cA & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \notin B \\ E & \text{si } 0 \in B \text{ et } 1 \in B \end{cases}$$

Comme $A \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est une tribu, $\emptyset$, A, ${}^cA$ et E sont tous éléments de $\mathcal{A}$ donc $\mathbb{1}_A^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Cela signifie que $\mathbb{1}_A : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ est mesurable.

– Montrons que f n'est pas réglée. Supposons par l'absurde que f soit réglée. Alors elle admet une limite ℓ à droite [1] en 0 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \ell.$$

Posons pout tout $n \in \mathbb{N}^*$ $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$. Pour tout $n \geq 2$, $x_n \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ et $y_n \in {}^c\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ donc $f(x_n) = 1$ et $f(y_n) = 0$. On en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = 1 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} f(y_n) = 0.$$

Or les deux suites (x_n) et (y_n) sont strictement positives et tendent vers 0. Comme f admet ℓ pour limite à droite en 0, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell = \lim_{n \to +\infty} f(y_n),$$

d'où $1 = \ell = 0$. C'est absurde. La fonction f n'est donc pas réglée.

1. voir le polycopié du cours page 22, théorème 4.21

Exercice 3. Soient X et Y deux espaces topologiques, et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) L'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X.

b) L'image réciproque par f de tout fermé de Y est un fermé de X.

Solution de l'exercice 3.
Il faut prouver une équivalence. On va donc prouver séparément chacune des deux implications.

- Montrons que a) entraîne b). Supposons que l'image réciproque par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X. Soit $A \subseteq Y$ un fermé. D'après les formules de Hausdorff[2] on sait que l'image réciproque est compatible avec les opérations ensemblistes, et en particulier que

  $$^c f^{-1}(A) = f^{-1}(^c A).$$

  Or comme A est fermé, $^c A$ est ouvert donc son image réciproque $f^{-1}(^c A)$ est un ouvert de X d'après l'hypothèse a). Donc $^c f^{-1}(A)$ est un ouvert et par conséquent son complémentaire $f^{-1}(A)$ est un fermé. Ceci étant vrai pour toute partie fermée A de Y, on a démontré l'assertion b).
- Montrons que b) entraîne a). La preuve est exactement la même que celle qui précède : il suffit d'échanger les mots « fermé » et « ouvert ».
  Supposons que l'image réciproque par f de tout fermé de Y est un fermé de X. Soit $A \subseteq Y$ un ouvert. D'après les formules de Hausdorff on sait que l'image réciproque est compatible avec les opérations ensemblistes, et en particulier que

  $$^c f^{-1}(A) = f^{-1}(^c A).$$

  Or comme A est ouvert, $^c A$ est fermé donc son image réciproque $f^{-1}(^c A)$ est un fermé de X d'après l'hypothèse b). Donc $^c f^{-1}(A)$ est un fermé et par conséquent son complémentaire $f^{-1}(A)$ est un ouvert. Ceci étant vrai pour toute partie ouverte A de Y, on a démontré l'assertion a).

2. voir le polycopié du cours page 24, et l'exercice 4 de la feuille de TD 1.