Devoir n°1

18 Octobre 2012
Durée : 1h

Tous les documents, ainsi que les calculatrices, sont interdits. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. Soit E un ensemble, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E.

a) Donner les définitions de $\liminf A_n$ et de $\limsup A_n$.

b) Montrer que $\limsup A_n^c = (\liminf A_n)^c$.

c) A l'aide de l'égalité précédente, montrer que :

$$\limsup(A_n \triangle A_{n+1}) \subseteq \limsup A_n \setminus \liminf A_n$$

d) Démontrer que $\limsup(A_n \triangle A_{n+1}) = \limsup A_n \setminus \liminf A_n$.

Exercice 2. On considère trois ensembles quelconques A, B et C.

a) Rappeler (sans le démontrer) quel est le cardinal de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

b) Montrer que si A et B ont même cardinal, $\operatorname{Card}\mathcal{P}(A) = \operatorname{Card}\mathcal{P}(B)$ et $\operatorname{Card}\{0,1\}^A = \operatorname{Card}\{0,1\}^B$.

c) Donner une injection de A^B dans $\mathcal{P}(A\times B)$.

d) En déduire que $\operatorname{Card}\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \operatorname{Card}\mathbb{R}$.

e) Donner une bijection entre $A^{B\times C}$ et $(A^B)^C$.

f) En déduire le cardinal de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 3. Soient $(E_1, \mathcal{A}_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables, et f une application de E_1 dans E_2.

a) Donner la définition de la *tribu image* de $\mathcal{A}_1$ par f, que l'on notera $\mathcal{F}$.

b) Vérifier que $\mathcal{F}$ est bien une tribu sur E_2.

c) Supposons que f est constante. Que vaut $\mathcal{F}$?

d) Dans cette question on suppose que E_2 contient au moins deux éléments. Soit A une partie de E_1, et a et b deux éléments distincts de E_2. On suppose que f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in A \\ b & \text{si } x \in A^c \end{cases}$$

i) Déterminer $\mathcal{F}$.

ii) Donner une condition nécessaire et suffisante sur l'ensemble E_2 et la tribu $\mathcal{A}_1$ pour que $\{f(B) : B \in \mathcal{A}_1\}$ soit une tribu.