Devoir n°1

18 Octobre 2012
Durée : 1h

Tous les documents, ainsi que les calculatrices, sont interdits. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. Soit E un ensemble, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E.

a) Donner les définitions de $\liminf A_n$ et de $\limsup A_n$.

b) Montrer que $\limsup A_n^c = (\liminf A_n)^c$.

c) A l'aide de l'égalité précédente, montrer que :

$$\limsup(A_n \triangle A_{n+1}) \subseteq \limsup A_n \setminus \liminf A_n$$

d) Démontrer que $\limsup(A_n \triangle A_{n+1}) = \limsup A_n \setminus \liminf A_n$.

Solution de l'exercice 1.

a) La limite inférieure de la suite d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la partie de E définie par :

$$\liminf A_n = \{x \in E : \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, x \in A_n\}.$$

La limite supérieure est définie par :

$$\limsup A_n = \{x \in E : \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ tel que } x \in A_n\}.$$

b) Soit $x \in E$. Grâce à la définition rappelée à la question précédente, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \limsup A_n^c &\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ tel que } x \in A_n^c \\ &\Leftrightarrow \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ tel que } x \notin A_n \end{aligned}$$

Cette dernière expression est la négation de :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, x \in A_n,$$

qui traduit le fait que $x \in \liminf A_n$. On a donc $x \in \limsup A_n^c$ si et seulement si $x \notin \liminf A_n$, d'où l'égalité :

$$\limsup A_n^c = (\liminf A_n)^c.$$

c) Grâce à l'égalité de la question b), on a

$$\limsup A_n \setminus \liminf A_n = \limsup A_n \cap (\liminf A_n)^c = \limsup A_n \cap \limsup A_n^c.$$

Soit $x \in \limsup(A_n \triangle A_{n+1})$ et $N \in \mathbb{N}$. En utilisant la définition de la limite supérieure donnée à la question a), on sait qu'il existe $n_0 \geq N$ tel que $x \in A_{n_0} \triangle A_{n_0+1}$. Or

$$x \in A_{n_0} \triangle A_{n_0+1} \Leftrightarrow x \in A_{n_0} \cap A_{n_0+1}^c \text{ ou } x \in A_{n_0}^c \cap A_{n_0+1}.$$

On en déduit qu'il existe un entier $n \geq N$ tel que $x \in A_n$ (par exemple $n = n_0$ ou $n = n_0+1$) et qu'il existe un autre entier $m \geq N$ tel que $x \in A_m^c$ (par exemple $m = n_0+1$ ou $m = n_0$).
Cela étant vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a prouvé que $x \in \limsup A_n$ et que $x \in \limsup A_n^c$, d'où l'inclusion

$$\limsup(A_n \triangle A_{n+1}) \subseteq \limsup A_n \cap \limsup A_n^c = \limsup A_n \setminus \liminf A_n.$$

d) On a déjà montré une inclusion à la question c). Montrons l'inclusion réciproque. Soit

$$x \in \limsup A_n \setminus \liminf A_n = \limsup A_n \cap \limsup A_n^c.$$

On veut montrer que $x \in \limsup(A_n \triangle A_{n+1})$. Fixons donc un entier $N \in \mathbb{N}$, et remarquons que :
- Comme $x \in \limsup A_n$, il existe $n_1 > N$ tel que $x \in A_{n_1}$.
- Comme $x \in \limsup A_n^c$, il existe $n_2 > n_1$ tel que $x \in A_{n_2}^c$.

Entre n_1 et n_2, il doit forcément exister un entier n_0 tel que $x \in A_{n_0}$ et $x \notin A_{n_0+1}$. Montrons cela : l'ensemble

$$B = \{k \in \mathbb{N} : k < n_2, x \in A_k\}$$

est non vide (il contient n_1) et majoré (par n_2), donc il admet un maximum n_0. Comme $n_0 \in B$, $x \in A_{n_0}$ et $n_0 < n_2$, donc $n_0 + 1 \leq n_2$. Si $n_0 + 1 = n_2$, alors $x \notin A_{n_0+1}$, et si $n_0 + 1 < n_2$ alors $x \notin A_{n_0+1}$ par maximalité de n_0. Dans les deux cas, on a :

$$x \in A_{n_0} \setminus A_{n_0+1} \subseteq A_{n_0} \triangle A_{n_0+1}.$$

Comme $n_0 \geq n_1 > N$, on a bien prouvé l'existence d'un entier $n \geq N$ vérifiant $x \in A_n \triangle A_{n+1}$. Donc $x \in \limsup(A_n \triangle A_{n+1})$ d'où l'inclusion $\limsup A_n \setminus \liminf A_n \subseteq \limsup(A_n \triangle A_{n+1})$, et par conséquent

$$\limsup(A_n \triangle A_{n+1}) = \limsup A_n \setminus \liminf A_n.$$

Exercice 2. On considère trois ensembles quelconques A, B et C.

a) Rappeler (sans le démontrer) quel est le cardinal de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

b) Montrer que si A et B ont même cardinal, $\operatorname{Card} \mathcal{P}(A) = \operatorname{Card} \mathcal{P}(B)$ et $\operatorname{Card}\{0,1\}^A = \operatorname{Card}\{0,1\}^B$.

c) Donner une injection de A^B dans $\mathcal{P}(A \times B)$.

d) En déduire que $\operatorname{Card} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \operatorname{Card} \mathbb{R}$.

e) Donner une bijection entre $A^{B\times C}$ et $(A^B)^C$.

f) En déduire le cardinal de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Solution de l'exercice 2.

a) On a vu lors du 3^e TD que $\mathrm{Card}\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \mathrm{Card}\,\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathrm{Card}\,\mathbb{R}$.

b) Supposons que A et B ont le même cardinal. Il existe une bijection $\varphi : A \to B$. Soit $\Phi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ l'application qui à toute partie $X \subseteq A$ associe son image $\varphi(X) \subseteq B$ par φ. Montrons que Φ est bijective :

- injectivité : si $\Phi(X) = \Phi(Y)$ alors $\varphi(X) = \varphi(Y)$ donc $X = \varphi^{-1}(\varphi(X)) = \varphi^{-1}(\varphi(Y)) = Y$. Ici φ^{-1} désigne l'application réciproque de φ, qui existe parce que φ est bijective.
- surjectivité : soit $Y \in B$. Alors $Y = \varphi(\varphi^{-1}(Y)) = \Phi(\varphi^{-1}(Y))$.

Φ est donc une bijection de $\mathcal{P}(A)$ sur $\mathcal{P}(B)$, d'où :

$$\mathrm{Card}\,\mathcal{P}(A) = \mathrm{Card}\,\mathcal{P}(B).$$

D'autre part, pour tout ensemble E, $\mathcal{P}(E)$ est en bijection avec $\{0,1\}^E$ via l'application $\Phi : \mathcal{P}(E) \to \{0,1\}^E$ qui à toute partie X de E associe sa fonction indicatrice $\mathbb{1}_X$. On a donc :

$$\mathrm{Card}\{0,1\}^A = \mathrm{Card}\,\mathcal{P}(A) = \mathrm{Card}\,\mathcal{P}(B) = \mathrm{Card}\{0,1\}^B.$$

c) Soit $\Phi : A^B \to \mathcal{P}(A \times B)$ l'application qui à tout $f \in A^B$ associe la partie :

$$\{(f(x), x) : x \in B\} \subseteq A \times B$$

Montrons que Φ est injective. Soient f et g deux éléments de A^B tels que $\Phi(f) = \Phi(g)$. Soit $x \in B$:

$$(f(x), x) \in \Phi(f) = \Phi(g) = \{(g(y), y) : y \in B\},$$

donc il existe $y \in B$ tel que $(f(x), x) = (g(y), y)$, c'est-à-dire $f(x) = g(y)$ et $x = y$, donc $f(x) = g(x)$. Ceci étant vrai $\forall x \in B$, on a $f = g$. Donc Φ est injective.

d) En appliquant le résultat de la question c) avec $A = B = \mathbb{N}$, on obtient une injection de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$, ce qui montre que $\mathrm{Card}\,\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq \mathrm{Card}\,\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$. Or $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, donc d'après la question b) $\mathrm{Card}\,\mathcal{P}(\mathbb{N}^2) = \mathrm{Card}\,\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathrm{Card}\,\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\mathrm{Card}\,\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \leq \mathrm{Card}\,\mathbb{R}.$$

D'autre part, comme $\{0,1\} \subseteq \mathbb{N}$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ donc

$$\mathrm{Card}\,\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \geq \mathrm{Card}\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \mathrm{Card}\,\mathbb{R}.$$

d'où l'égalité demandée.

e) Soit $\Phi : A^{B\times C} \to (A^B)^C$ la fonction définie par :

$$\Phi(f) = \left(\begin{array}{ccc} C & \to & A^B \\ c & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} B & \to & A \\ b & \mapsto & f(b,c) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Φ est une bijection. En effet, sa réciproque est donnée par :

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & (A^B)^C & \to & A^{B\times C} \\ & G & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} B \times C & \to & A \\ (b,c) & \mapsto & [G(c)](b) \end{array} \right) \end{array}$$

Il est clair que Φ et Ψ sont réciproques l'une de l'autre, ce qui montre la bijectivité de Φ.
Remarque : cette question fait l'objet de l'exercice 10 de la feuille n°1. Vous pouvez vous reporter à la solution de cet exercice[1] pour plus de commentaires.

f) On a besoin du résultat suivant :
Lemme : si A et B sont en bijection, alors A^C et B^C le sont aussi.
Preuve : soit $\varphi : A \to B$ bijective. L'application $\Phi : A^C \to B^C$ définie, pour $f \in A^C$, par $\Phi(f) = \varphi \circ f$, est une bijection.
Remarque : ce lemme est démontré dans la question d) de l'exercice 9 de la feuille n°1. Reportez-vous à sa correction pour plus de commentaires.
Comme $\operatorname{Card}\mathbb{R} = \operatorname{Card}\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, le lemme précédent entraîne que $\operatorname{Card}\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \operatorname{Card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$. En appliquant le résultat de la question e) avec $A = \{0,1\}$ et $B = C = \mathbb{N}$, on obtient :

$$\operatorname{Card}(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} = \operatorname{Card}\{0,1\}^{\mathbb{N}^2}.$$

Or d'après la question b), comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable ce dernier cardinal vaut $\operatorname{Card}\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire $\operatorname{Card}\mathbb{R}$, d'où :

$$\operatorname{Card}\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \operatorname{Card}\mathbb{R}.$$

Exercice 3. Soient $(E_1, \mathcal{A}_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables, et f une application de E_1 dans E_2.

a) Donner la définition de la *tribu image* de $\mathcal{A}_1$ par f, que l'on notera $\mathcal{F}$.

b) Vérifier que $\mathcal{F}$ est bien une tribu sur E_2.

c) Supposons que f est constante. Que vaut $\mathcal{F}$?

d) Dans cette question on suppose que E_2 contient au moins deux éléments. Soit A une partie de E_1, et a et b deux éléments distincts de E_2. On suppose que f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in A \\ b & \text{si } x \in A^c \end{cases}$$

   i) Déterminer $\mathcal{F}$.

   ii) Donner une condition nécessaire et suffisante sur l'ensemble E_2 et la tribu $\mathcal{A}_1$ pour que $\{f(B) : B \in \mathcal{A}_1\}$ soit une tribu.

Solution de l'exercice 3.

a) La tribu image de $\mathcal{A}_1$ par f est :

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq E_2 : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}.$$

b) $\mathcal{F}$ est une classe de parties de E_2, et :
– $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}_1$, donc $\emptyset \in \mathcal{F}$.
– si $A \in \mathcal{F}$, alors $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \in \mathcal{A}_1$ donc $A^c \in \mathcal{F}$.

1. http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/levy/LM364-TD1C.pdf

– si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{F}$, alors

$$f^{-1}(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n) = \cup_{n\in\mathbb{N}}f^{-1}(A_n) \in \mathcal{A}_1$$

donc $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ est donc bien une tribu sur E_2.

c) Soit $a \in E_2$ la valeur constante que prend f sur E_1. Pour toute partie B de E_2 on a

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} E_1 & \text{si } x \in B \\ \emptyset & \text{si } x \notin B \end{cases}$$

donc $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$. Par conséquent $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E_2)$ est la tribu triviale.

d) i) Soit $B \subseteq E_2$ une partie quelconque de E_2. Suivant les cas, $f^{-1}(B)$ peut prendre 4 valeurs possibles :

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} E_1 & \text{si } a, b \in B \\ \emptyset & \text{si } a, b \notin B \\ A & \text{si } a \in B \text{ et } b \notin B \\ A^c & \text{si } a \notin B \text{ et } b \in B \end{cases}$$

On a donc deux possibilités :
– si $A \in \mathcal{A}_1$, alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ dans tous les cas d'où $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E_2)$.
– si $A \notin \mathcal{A}_1$, alors $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1 \Leftrightarrow f^{-1}(B) = \emptyset$ ou E_1, d'où :

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq E_2 : a, b \in B \text{ ou } a, b \notin B\}.$$

ii) Pour que $\{f(B) : B \in \mathcal{A}_1\}$ soit une tribu sur E_2, il doit contenir E_2. Or pour tout $B \subseteq E_1$, $f(B) \subseteq \{a, b\}$. Il faut donc que $E_2 \subseteq \{a, b\}$. Comme E_2 contient au moins deux éléments, cela entraîne que $E_2 = \{a, b\}$.

De plus, pour que $\{f(B) : B \in \mathcal{A}_1\}$ contienne $\{a, b\}$, il faut que A soit différent de $\emptyset$ et de E_1.

Il n'y a que deux tribus sur $\{a, b\}$: ce sont les tribus grossière et triviale. $\{f(B) : B \in \mathcal{A}_1\}$ contient toujours $\emptyset$ et E_2, et de plus :
– $\{f(B) : B \in \mathcal{A}_1\} = \{\emptyset, E_2\} \Longrightarrow \forall B \in \mathcal{A}_1, B \cap A \neq \emptyset$ et $B \cap A^c \neq \emptyset$
– $\{f(B) : B \in \mathcal{A}_1\} = \mathcal{P}(E_2) \Longrightarrow \exists B_1, B_2 \in \mathcal{A}_1$ tels que $B_1 \subseteq A$ et $B_2 \subseteq A^c$.

Une condition nécessaire pour que l'ensemble $\{f(B) : B \in \mathcal{A}_1\}$ soit une tribu sur E_2 est donc :

$$E_2 = \{a, b\}, A \notin \{\emptyset, E_1\}, \text{ et}$$

$$\forall B \in \mathcal{A}_1, B \cap A \neq \emptyset \text{ et } B \cap A^c \neq \emptyset \text{ ou } \exists B_1, B_2 \in \mathcal{A}_1 \text{ tels que } B_1 \subseteq A \text{ et } B_2 \subseteq A^c.$$

Réciproquement, si cette condition est vérifiée alors la classe de parties $\{f(B) : B \in \mathcal{A}_1\}$ est égale à la tribu grossière ou à la tribu triviale sur E_2. C'est donc une condition suffisante.