PCME 23.1 | Devoir n°3 | 18 Mai 2012

Carlo De Franchis | Sujet B | Durée : 1h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les calculatrices sont interdites.

1 Questions de cours (8 points)

Dans cette partie, vous devez pour chaque question définir toutes les notations utilisées dans votre réponse.

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de composantes respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3). Donner la définition du produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Soit A une matrice de taille 3×3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible, et, en supposant cette condition réalisée, donner l'expression de l'inverse de A en fonction de sa comatrice.
3. Soient u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. A quelle condition dit-on qu'ils forment une famille libre ? A quelle condition dit-on qu'ils forment une famille liée ?
4. Soit $a \in \mathbb{C}$, et $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la formule donnant les solutions de l'équation $z^n = a$.

2 Exercices (12 points)

Dans cette partie, il est demandé de faire figurer les réponses dans les espaces laissés à cet effet. On ne demande pas de justifications, mais seulement le résultat du calcul.

1. Donner l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Calculer, en fonction de $b \in \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ 1 & 1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$.

3. Donner les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $3z^2 - \frac{3i}{2}z + \frac{3}{2} = 0$.

4. Donner les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Donner une équation cartésienne du plan orthogonal au vecteur $\vec{n} = (2, 0, 0)$ et passant par le point A de coordonnées $(1, 1, 1)$.

6. Donner la matrice de l'application $f : (x, y, z,) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (0, x - 2z, z - 3y)$.

7. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de composantes respectives $(2, -1, 6)$ et $(1, 3, -1)$. Calculer $\|\vec{u} + \vec{v}\|$.

8. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de composantes respectives $(2, -3)$ et $(1, -1)$. Calculer l'aire orientée du triangle engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

9. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2.

10. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(x + ky)$?