UPMC - LM 121

PCME 23.1	Devoir n°2	6 Avril 2012
Carlo De Franchis	Sujet B	Durée : 1h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Vous êtes invités à encadrer les résultats de vos calculs. Les calculatrices sont interdites.

Ce sujet comprend 6 exercices sur un total de 20 points.

Exercice 1 (3 points)

On considère quatre entiers naturels n, p, n' et p', ainsi que deux matrices A et B de tailles respectives $n \times p$ et $n' \times p'$, à coefficients réels.

(a) A quelle condition sur n, p, n' et p' le produit matriciel BA est-il défini ?

(b) Dans ce cas, donner la taille de la matrice $C = BA$ et l'expression de son coefficient d'indice (i, j), que l'on notera c_{ij}.

Exercice 2 (3 points)

Soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe écrit sous forme polaire, avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculer $\arg(-z)$, $\arg(\frac{1}{z^2})$ et $\arg(\bar{z}^2)$ en fonction de θ.

Exercice 3 (5 points)

On considère l'équation $z^4 + 2iz^2 - 1 = 0$.

(a) Sans faire de calcul, mais en justifiant soigneusement, donner son nombre de solutions.

(b) Combien y a-t-il de solutions distinctes ?

(c) Calculer la somme des solutions.

Exercice 4 (3 points)

Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie ci-dessous est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

$$f : z \mapsto \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z + \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

Exercice 5 (6 points)

Soient $\vec{u} = (1, 2, 3), \vec{v} = (3, 1, 2)$ et $\vec{w} = (2, 3, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

(b) Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils linéairement indépendants ?

(c) Donner une équation cartésienne du plan engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et passant par le point A de coordonnées $(1, 1, 1)$.

(d) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$.

Exercice 6 (4 points (bonus))

Soient x et y deux nombres réels, et n un entiel naturel. Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(x + ky)$$