PCME 23.1
Carlo De Franchis

Devoir n°1
Sujet B

23 Mars 2012

Corrigé

Exercice 1 (4 points)

(a) Donner l'écriture cartésienne des nombres complexes suivants :

i. $z = \frac{1-i}{3+5i}$

ii. $z = \frac{2-i}{(3+5i)^2}$

Solution:

i. $z = \frac{1-i}{3+5i} = \frac{(1-i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)} = \frac{3-5-3i-5i}{3^2+5^2} = -\frac{2}{34} - \frac{8}{34}i = -\frac{1}{17} - \frac{4}{17}i$

ii. $z = \frac{2-i}{(3+5i)^2} = \frac{(2-i)(3-5i)^2}{[(3+5i)(3-5i)]^2} = \frac{(2-i)(9-25-30i)}{(9+25)^2} = \frac{(2-i)(-16-30i)}{34^2} = \frac{-32-30+i(16-60)}{1156}$
$= -\frac{62}{1156} - \frac{44}{1156}i = -\frac{31}{578} - \frac{22}{578}i$

(b) Donner l'écriture polaire des nombres complexes suivants :

i. $z = \sqrt{2}(1+i)$

ii. $z = 3i\sqrt{2}(1+i)$

Solution:

i. $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ donc le module de z vaut $|z| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$ donc tout argument θ de z doit vérifier les égalités $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Le réel $\theta = \frac{\pi}{4}$ convient, donc $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

ii. D'après la question précédente, $z = 3i \times 2e^{i\frac{\pi}{4}}$. Comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, on obtient $z = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 6e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})} = 6e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Exercice 2 (5 points)

(a) Donner les formules d'Euler.

Solution:
Pour tout nombre réel θ, $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

(b) Linéariser $\cos\theta\sin^3\theta$.

Solution:
On exprime $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ à l'aide des formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
\cos\theta\sin^3\theta &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2i)^3} \times (e^{i\theta}+e^{-i\theta})(e^{i\theta}-e^{-i\theta})^3 \\
&= -\frac{1}{16i}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})(e^{i3\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) \\
&= -\frac{1}{16i}(e^{i4\theta} + e^{i2\theta} - 3e^{i2\theta} - 3 + 3 + 3e^{-i2\theta} - e^{-i2\theta} - e^{-i4\theta}) \\
&= -\frac{1}{16i}(e^{i4\theta} - e^{-i4\theta} - 2(e^{i2\theta} - e^{-i2\theta})) \\
&= -\frac{1}{16i}(2i\sin 4\theta - 2 \times 2i\sin 2\theta) \\
&= \frac{2\sin 2\theta - \sin 4\theta}{8}
\end{aligned}$$

(c) Calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{k=1}^{n} e^{-ik\theta}$$

Solution:
S est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $e^{-i\theta}$ dont le premier terme est $e^{-i\theta}$. Si $e^{-i\theta} \neq 1$, on peut utiliser la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} S &= e^{-i\theta}\frac{1-(e^{-i\theta})^n}{1-e^{-i\theta}} = e^{-i\theta}\frac{e^{-i\frac{n}{2}\theta}\left(e^{i\frac{n}{2}\theta}-e^{-i\frac{n}{2}\theta}\right)}{e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} \\ &= e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}\frac{2i\sin\frac{n}{2}\theta}{2i\sin\frac{\theta}{2}} = e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

Pour passer de la première à la deuxième ligne de ce calcul on a utilisé la formule d'Euler donnée à la première question : $2i\sin x = e^{ix} - e^{-ix}$. Lorsque $e^{-i\theta} = 1$, tous les termes de la somme valent 1 donc $S = n$. Comme $e^{-i\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 \quad [2\pi]$, on a en conclusion :

$$S = \begin{cases} e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} & \text{si} \quad \theta \neq 0 \quad [2\pi] \\ n & \text{si} \quad \theta = 0 \quad [2\pi] \end{cases}$$

Exercice 3 (5 points)

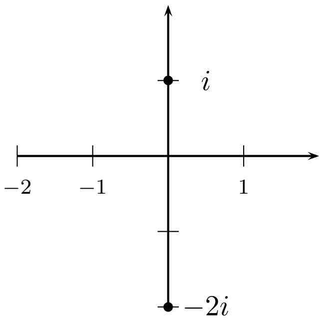
(a) Calculer la somme des racines du polynome $z^2 + 3z - 1$.

Solution:
La somme des racines du polynôme $aX^2 + bX + C$ vaut $\frac{-b}{a}$. La somme demandée ici vaut donc -3.

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + iz + 2 = 0$. Placer la ou les éventuelles solutions sur une figure.

Solution:
Le discriminant vaut $\Delta = i^2 - 4 \times 1 \times 2 = -1 - 8 = -9$. Il y a donc deux solutions complexes qui valent $z_1 = \frac{-i-i\sqrt{9}}{2} = -2i$ et $z_2 = \frac{-i+i\sqrt{9}}{2} = i$.

$$S = \{-2i, i\}$$

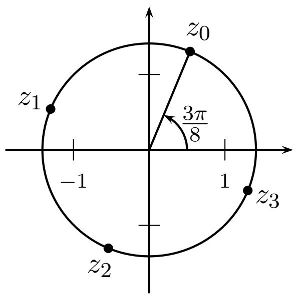


Remarque : les deux solutions ne sont pas conjuguées l'une de l'autre. Cela aurait été le cas si les coefficients de l'équation avaient été réels.

(c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = -4i$. Placer la ou les éventuelles solutions sur une figure.

Solution:
Les solutions de cette équation sont les racines $4^{\text{èmes}}$ du nombre $-4i = 4e^{i\frac{3\pi}{2}}$, c'est-à-dire les nombres $\sqrt[4]{4}e^{i(\frac{3\pi}{2\times 4}+\frac{2k\pi}{4})}$ pour $k = 0, 1, 2$ et 3. Comme $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ et $e^{i(\frac{3\pi}{2\times 4}+\frac{2k\pi}{4})} = e^{i(\frac{3\pi}{8}+k\frac{\pi}{2})}$, on a :

$$S = \left\{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}, \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{8}}, \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{8}}, \sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{8}}\right\}$$



Exercice 4 (3 points)

On considère les deux nombres complexes suivants :

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

(a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme cartésienne.

Solution:
$z_1 = \cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) Calculer le produit z_1z_2 sous forme cartésienne puis sous forme polaire.

Solution:
Sous forme cartésienne, $z_1z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Sous forme polaire, $z_1z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

(c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Solution:
La question précédente permet de connaître les parties réelles et imaginaires de $e^{i\frac{\pi}{12}}$. On a donc : $\cos\frac{\pi}{12} = \mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{12}}) = \mathrm{Re}(z_1z_2) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, et de même $\sin\frac{\pi}{12} = \mathrm{Im}(e^{i\frac{\pi}{12}}) = \mathrm{Im}(z_1z_2) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 5 (3 points)
Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie l'équation :

$$\left|\frac{z+2}{i-z}\right| = 1$$

Solution:
Soit M un point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C} - \{i\}$. L'équation de l'énoncé s'écrit

$$\left|\frac{z+2}{i-z}\right| = 1 \Leftrightarrow |z+2| = |i-z| \Leftrightarrow |z+2|^2 = |i-z|^2.$$

Or en posant $z = x+iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} |z+2|^2 &= |x+2+iy|^2 = (x+2)^2 + y^2 \\ |i-z|^2 &= |-x+i(-y+1)|^2 = x^2 + (y-1)^2 \end{aligned}$$

donc l'équation de l'énoncé est équivalente à :

$$\begin{aligned} & (x+2)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \\ \Longleftrightarrow\quad & x^2 + 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \\ \Longleftrightarrow\quad & 4x + 3 = -2y \\ \Longleftrightarrow\quad & y = -2x - \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Cette droite ne contient pas le point $A(0,1)$ d'affixe i, donc l'ensemble recherché est bien la droite d'équation $y = -2x - \frac{3}{2}$.