PCME 23.1 | Devoir n°3 | 18 Mai 2012

Carlo De Franchis | Sujet A | Durée : 1h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les calculatrices sont interdites.

1 Questions de cours (8 points)

Dans cette partie, vous devez pour chaque question définir toutes les notations utilisées dans votre réponse.

1. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de composantes respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3). Donner la définition du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Soient u, v et w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. A quelle condition dit-on qu'ils forment une famille libre ? A quelle condition dit-on qu'ils forment une famille liée ?
3. Soit A une matrice de taille 3×3, et $(i, j) \in \{1, \dots, 3\}^2$. Donner la définition du mineur d'indice (i, j), du cofacteur d'indice (i, j), et enfin de la comatrice de A.
4. Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Donner la définition du noyau de u.

2 Exercices (12 points)

Dans cette partie, il est demandé de faire figurer les réponses dans les espaces laissés à cet effet. On ne demande pas de justifications, mais seulement le résultat du calcul.

1. Donner les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 = -i$.

2. Donner l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Donner les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $4z^2 + 4iz - 1 = 0$.

4. Donner une équation cartésienne du plan orthogonal au vecteur $\vec{n} = (1, 1, 1)$ et passant par le point A de coordonnées $(1, 2, 3)$.

5. Donner la matrice de l'application $f : (x, y, z,) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y + z, -z, y - 3z)$.

6. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de composantes respectives $(2, -1)$ et $(1, -3)$. Calculer l'aire orientée du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

7. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de composantes respectives $(2, -1, 6)$ et $(1, 3, -1)$. Calculer $\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| - \vec{u} \cdot \vec{v}$.

8. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + ky)$?

9. Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2.

10. Calculer, en fonction de $a \in \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ a & 1 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$.