UPMC - LM 121

PCME 23.1 — Devoir n°2 — 6 Avril 2012

Carlo De Franchis — Sujet A — Durée : 1h

Corrigé

Exercice 1 (3 points)

On considère quatre entiers naturels n, p, n' et p', ainsi que deux matrices A et B de tailles respectives $n \times p$ et $n' \times p'$, à coefficients réels.

(a) A quelle condition sur n, p, n' et p' le produit matriciel AB est-il défini ?

> **Solution:**
> Le produit matriciel AB est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B, c'est-à-dire si $p = n'$.

(b) Dans ce cas, donner la taille de la matrice $C = AB$ et l'expression de son coefficient d'indice (i, j), que l'on notera c_{ij}.

> **Solution:**
> La matrice C est de taille $n \times p'$ et, pour tout couple (i, j) tel que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p'$ on a :
> $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$
> où a_{ik} et b_{kj} désignent respectivement les coefficients d'indice (i, k) et (k, j) des matrices A et B.

Exercice 2 (3 points)

Soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe écrit sous forme polaire, avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Calculer $\arg(z^2)$, $\arg(\frac{1}{z})$ et $\arg(\bar{z})$ en fonction de θ.

> **Solution:**
> $z^2 = r^2 e^{i2\theta}$, donc comme r^2 est un réel positif, on a bien là une écriture polaire de z^2. Un argument de z^2 est donc 2θ. De la même façon, $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$, donc un argument de $\frac{1}{z}$ est $-\theta$. Enfin, comme $\bar{z} = re^{-i\theta}$, un argument de $\bar{z}$ est $-\theta$.

Exercice 3 (5 points)

On considère l'équation $z^4 + 4iz^2 - 4 = 0$.

(a) Sans faire de calcul, mais en justifiant soigneusement, donner son nombre de solutions.

> **Solution:**
> D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme à coefficients complexes et de degré n admet exactement n racines (non nécessairement distinctes) dans $\mathbb{C}$. Le polynôme $z^4 + 4iz^2 - 4$ est de degré 4, donc admet 4 racines, ce qui signifie que l'équation possède 4 solutions.

(b) Combien y a-t-il de solutions distinctes ?

> **Solution:**
> Soit z une solution. Posons $Z = z^2$. Alors Z est une solution de l'équation
> $$Z^2 + 4iZ - 4 = 0.$$
> On reconnaît ici la forme développée du carré $(Z + 2i)^2$, donc l'équation ci-dessus admet une unique solution qui est $Z = -2i$. Il s'agit d'une racine double. z est donc une racine carrée de $-2i$. Comme $-2i = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$, ses racines carrées sont $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $-\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Il y a donc deux valeurs possibles pour z : l'équation a deux solutions distinctes.

(c) Calculer la somme des solutions.

Solution:
D'après la question précédente, la somme des solutions vaut

$$S = -\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} + \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 0.$$

Exercice 4 (3 points)
Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie ci-dessous est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

$$f : z \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) z + 1 + (1-\sqrt{2})i$$

Solution:
Cherchons un éventuel point fixe z_* de la transformation :

$$\begin{aligned}
& z_* = f(z_*) \\
\Leftrightarrow \quad & z_* = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) z_* + 1 + (1-\sqrt{2})i \\
\Leftrightarrow \quad & z_* \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 + (1-\sqrt{2})i \\
\Leftrightarrow \quad & z_* = \frac{1+(1-\sqrt{2})i}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i} = \frac{(1+(1-\sqrt{2})i)(1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)}{(1-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} \\
\Leftrightarrow \quad & z_* = \frac{2-\sqrt{2}+i(2-\sqrt{2})}{2-\sqrt{2}} = 1+i
\end{aligned}$$

donc f admet un unique point fixe, $z_* = 1+i$. On calcule donc

$$\begin{aligned}
f(z) - (1+i) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) z - \sqrt{2}i \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(z-(1+i)) \\
&= e^{i\frac{\pi}{4}}(z-(1+i))
\end{aligned}$$

car $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(1+i) = \sqrt{2}i$. On a donc finalement pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = (1+i) + e^{i\frac{\pi}{4}}(z-(1+i)).$$

f est donc la rotation de centre Ω, d'affixe $1+i$, et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 5 (6 points)
Soient $\vec{u} = (1,2,3), \vec{v} = (2,3,1)$ et $\vec{w} = (3,1,2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Solution:

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{aligned}[t] &= 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (6-1) - 2 \times (4-3) + 3 \times (2-9) \\ &= -18 \end{aligned}$$

(b) Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils linéairement indépendants ?

Solution:
Comme $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0$, les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

(c) Donner une équation cartésienne du plan engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et passant par le point A de coordonnées $(1,1,1)$.

Solution:
Soit Π le plan engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et passant par le point A de coordonnées $(1,1,1)$, et M un point de l'espace de coordonnées (x,y,z). Le point M est dans le plan Π si et seulement si les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont liés, donc on a l'équivalence :

$$M \in \Pi \Longleftrightarrow \det(\vec{v},\vec{w},\overrightarrow{AM}) = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \det(\vec{v},\vec{w},\overrightarrow{AM}) &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & x-1 \\ 3 & 1 & y-1 \\ 1 & 2 & z-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1) \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1) \times (6-1) - (y-1) \times (4-3) + (z-1) \times (2-9) \\ &= 5x - y - 7z + 3, \end{aligned}$$

donc une équation cartésienne du plan Π est :

$$5x - y - 7z + 3 = 0.$$

(d) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$.

Solution:
La droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$ est la droite $\mathbb{R}\vec{u}$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{M \in \mathbb{R}^3 \,|\, \overrightarrow{OM} = t\vec{u}, t \in \mathbb{R}\},$$

dont un système d'équations paramétriques est :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x &=& t \\ y &=& 2t \\ z &=& 3t \end{array} \right.$$

On en déduit un système d'équations cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & = & 2x \\ z & = & 3x \end{array} \right.$$

Exercice 6 (4 points (bonus))

Soient x et y deux nombres réels, et n un entiel naturel. Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x+ky)$$

Solution:

Soit S la somme demandée. Comme $\cos(x+ky) = \mathrm{Re}(e^{i(x+ky)})$, on a :

$$S = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(x+ky)}\right)$$

Or $e^{i(x+ky)}$=$e^{ix}(e^{iy})^k$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(x+ky)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ix}(e^{iy})^k \\ &= e^{ix} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{iy})^k 1^{n-k} \\ &= e^{ix}(e^{iy}+1)^n. \end{aligned}$$

Dans l'avant-dernière ligne de ce calcul on a reconnu la formule du binôme de Newton. D'autre part, $e^{iy}+1 = e^{i\frac{y}{2}}(e^{i\frac{y}{2}} + e^{-i\frac{y}{2}}) = 2e^{i\frac{y}{2}} \cos\frac{y}{2}$, donc finalement :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(x+ky)} = 2^n e^{i(x+\frac{ny}{2})} \cos^n \frac{y}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{Re}\left(2^n e^{i(x+\frac{ny}{2})} \cos^n \frac{y}{2}\right) \\ &= 2^n \mathrm{Re}\left(e^{i(x+\frac{ny}{2})}\right) \cos^n \frac{y}{2} \\ &= 2^n \cos(x+\frac{ny}{2}) \cos^n \frac{y}{2}. \end{aligned}$$