

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Vous êtes invités à encadrer les résultats de vos calculs. Les calculatrices sont interdites.

Ce sujet comprend 5 exercices sur un total de 20 points.

Exercice 1 (4 points)

(a) Donner l'écriture cartésienne des nombres complexes suivants :

i. $z = \frac{1+i}{3+4i}$

ii. $z = \frac{2-i}{(3+4i)^2}$

(b) Donner l'écriture polaire des nombres complexes suivants :

i. $z = \sqrt{3} + i$

ii. $z = 3i(\sqrt{3} + i)$

Exercice 2 (5 points)

(a) Donner les formules d'Euler.

(b) Linéariser $\cos^3 \theta \sin \theta$.

(c) Calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^n e^{i2k\theta}$$

Exercice 3 (5 points)

(a) Calculer la somme des racines du polynôme $z^2 + 3z - 5$.

(b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - iz + 2 = 0$. Placer la ou les éventuelles solutions sur une figure.

(c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 = 9i$. Placer la ou les éventuelles solutions sur une figure.

Exercice 4 (3 points)

On considère les deux nombres complexes suivants :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

(a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme cartésienne.

(b) Calculer le produit $z_1 z_2$ sous forme cartésienne puis sous forme polaire.

(c) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 5 (3 points)

Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie l'équation :

$$\left| \frac{z-2}{z-i} \right| = 1$$