UPMC - LM 121

PCME 23.1 — Devoir n°1

Carlo De Franchis — Sujet A — 23 Mars 2012

Corrigé

Exercice 1 (4 points)

(a) Donner l'écriture cartésienne des nombres complexes suivants :

i. $z = \frac{1+i}{3+4i}$

ii. $z = \frac{2-i}{(3+4i)^2}$

> **Solution:**
>
> i. $z = \frac{1+i}{3+4i} = \frac{(1+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3+4+3i-4i}{3^2+4^2} = \frac{7}{25} - \frac{1}{25}i$
>
> ii. $z = \frac{2-i}{(3+4i)^2} = \frac{(2-i)(3-4i)^2}{[(3+4i)(3-4i)]^2} = \frac{(2-i)(9-16-24i)}{(9+16)^2} = \frac{(2-i)(-7-24i)}{25^2} = \frac{-14-24+i(7-48)}{625}$
> $= -\frac{38}{625} - \frac{41}{625}i$

(b) Donner l'écriture polaire des nombres complexes suivants :

i. $z = \sqrt{3} + i$

ii. $z = 3i(\sqrt{3} + i)$

> **Solution:**
>
> i. Le module de z vaut $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$ donc tout argument θ de z doit vérifier les égalités $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$. Le réel $\theta = \frac{\pi}{6}$ convient, donc $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
>
> ii. D'après la question précédente, $z = 3i \times 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. Comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, on obtient $z = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 6e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})} = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Exercice 2 (5 points)

(a) Donner les formules d'Euler.

> **Solution:**
>
> Pour tout nombre réel θ, $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

(b) Linéariser $\cos^3\theta\sin\theta$.

> **Solution:**
>
> On exprime $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ à l'aide des formules d'Euler :
>
> $$\begin{aligned}
> \cos^3\theta\sin\theta &= \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2i} \times (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\
> &= \frac{1}{16i}(e^{i3\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\
> &= \frac{1}{16i}(e^{i4\theta} - e^{i2\theta} + 3e^{i2\theta} - 3 + 3 - 3e^{-i2\theta} + e^{-i2\theta} - e^{-i4\theta}) \\
> &= \frac{1}{16i}(e^{i4\theta} - e^{-i4\theta} + 2(e^{i2\theta} - e^{-i2\theta})) \\
> &= \frac{1}{16i}(2i\sin 4\theta + 2 \times 2i\sin 2\theta) \\
> &= \frac{\sin 4\theta + 2\sin 2\theta}{8}
> \end{aligned}$$

(c) Calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^{n} e^{i2k\theta}$$

Solution:
S est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de raison $e^{i2\theta}$ dont le premier terme est 1. Si $e^{i2\theta} \neq 1$, on peut utiliser la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1-(e^{i2\theta})^{n+1}}{1-e^{i2\theta}} = \frac{e^{i(n+1)\theta}\left(e^{-i(n+1)\theta}-e^{i(n+1)\theta}\right)}{e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}-e^{i\theta}\right)} \\ &= e^{in\theta}\frac{-2i\sin(n+1)\theta}{-2i\sin\theta} = e^{in\theta}\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \end{aligned}$$

Pour passer de la première à la deuxième ligne de ce calcul on a utilisé la formule d'Euler donnée à la première question : $2i\sin x = e^{ix} - e^{-ix}$. Lorsque $e^{i2\theta} = 1$, tous les termes de la somme valent 1 donc $S = n+1$. Comme $e^{i2\theta} = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 \quad [\pi]$, on a en conclusion :

$$S = \begin{cases} e^{in\theta}\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} & \text{si} \quad \theta \neq 0 \quad [\pi] \\ n+1 & \text{si} \quad \theta = 0 \quad [\pi] \end{cases}$$

Exercice 3 (5 points)

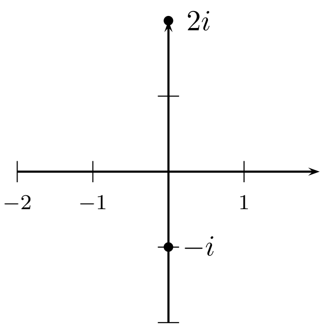
(a) Calculer la somme des racines du polynome $z^2 + 3z - 5$.

Solution:
La somme des racines du polynôme $aX^2 + bX + C$ vaut $\frac{-b}{a}$. La somme demandée ici vaut donc -3.

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - iz + 2 = 0$. Placer la ou les éventuelles solutions sur une figure.

Solution:
Le discriminant vaut $\Delta = (-i)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -1 - 8 = -9$. Il y a donc deux solutions complexes qui valent $z_1 = \frac{i - i\sqrt{9}}{2} = -i$ et $z_2 = \frac{i + i\sqrt{9}}{2} = 2i$.

$$S = \{-i, 2i\}$$

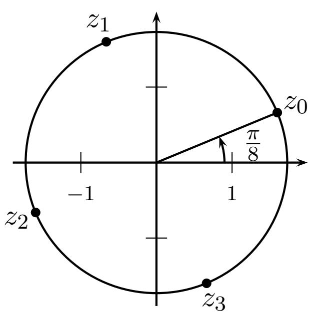


Remarque : les deux solutions ne sont pas conjuguées l'une de l'autre. Cela aurait été le cas si les coefficients de l'équation avaient été réels.

(c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 9i$. Placer la ou les éventuelles solutions sur une figure.

Solution:
Les solutions de cette équation sont les racines $4^{\text{èmes}}$ du nombre $9i = 9e^{i\frac{\pi}{2}}$, c'est-à-dire les nombres $\sqrt[4]{9}e^{i(\frac{\pi}{2\times 4}+\frac{2k\pi}{4})}$ pour $k = 0, 1, 2$ et 3. Comme $\sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$ et $e^{i(\frac{\pi}{2\times 4}+\frac{2k\pi}{4})} = e^{i(\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2})}$, on a :

$$S = \left\{\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{8}}, \sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{8}}, \sqrt{3}e^{i\frac{9\pi}{8}}, \sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{8}}\right\}$$



Exercice 4 (3 points)
On considère les deux nombres complexes suivants :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

(a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme cartésienne.

Solution:
$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = \cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

(b) Calculer le produit z_1z_2 sous forme cartésienne puis sous forme polaire.

Solution:
Sous forme cartésienne, $z_1z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Sous forme polaire, $z_1z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{\pi}{6}} = e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

(c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Solution:
La question précédente permet de connaître les parties réelles et imaginaires de $e^{i\frac{\pi}{12}}$. On a donc : $\cos\frac{\pi}{12} = \mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{12}}) = \mathrm{Re}(z_1z_2) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, et de même $\sin\frac{\pi}{12} = \mathrm{Im}(e^{i\frac{\pi}{12}}) = \mathrm{Im}(z_1z_2) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 5 (3 points)

Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie l'équation :

$$\left|\frac{z-2}{z-i}\right| = 1$$

Solution:

Soit M un point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C} - \{i\}$. L'équation de l'énoncé s'écrit

$$\left|\frac{z-2}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-2| = |z-i| \Leftrightarrow |z-2|^2 = |z-i|^2.$$

Or en posant $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} |z-2|^2 &= |x-2+iy|^2 = (x-2)^2 + y^2 \\ |z-i|^2 &= |x+i(y-1)|^2 = x^2 + (y-1)^2 \end{aligned}$$

donc l'équation de l'énoncé est équivalente à :

$$\begin{aligned} & (x-2)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \\ \Longleftrightarrow\ & x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \\ \Longleftrightarrow\ & -4x + 3 = -2y \\ \Longleftrightarrow\ & y = 2x - \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Cette droite ne contient pas le point $A(0,1)$ d'affixe i, donc l'ensemble recherché est bien la droite d'équation $y = 2x - \frac{3}{2}$.