PCME 22.3 — UPMC - LM 121 — 6 Avril 2012

Carlo De Franchis — Devoir n°2 — Durée : 1h

Corrigé

Exercice 1 (3 points)

On considère quatre entiers naturels n, p, n' et p', ainsi que deux matrices A et B de tailles respectives $n \times p$ et $n' \times p'$, à coefficients réels.

(a) A quelle condition sur n, p, n' et p' le produit matriciel BA est-il défini ?

Solution:
Le produit matriciel BA est défini si et seulement si le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A, c'est-à-dire si $p' = n$.

(b) Dans ce cas, donner la taille de la matrice $C = BA$ et l'expression de son coefficient d'indice (i, j), que l'on notera c_{ij}.

Solution:
La matrice C est de taille $n' \times p$ et, pour tout couple (i, j) tel que $1 \leq i \leq n'$ et $1 \leq j \leq p$ on a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

où b_{ik} et a_{kj} désignent respectivement les coefficients d'indice (i, k) et (k, j) des matrices B et A.

Exercice 2 (3 points)

Soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe écrit sous forme polaire, avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Calculer $\arg(-z)$, $\arg(\frac{1}{z^2})$ et $\arg(\bar{z}^2)$ en fonction de θ.

Solution:
$-z = re^{i\theta}e^{i\pi} = re^{i(\theta+\pi)}$, donc comme r est un réel positif, on a bien là une écriture polaire de $-z$. Un argument de $-z$ est donc $\theta + \pi$. De la même façon, $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{r^2}e^{-i2\theta}$, donc un argument de $\frac{1}{z^2}$ est -2θ. Enfin, comme $\bar{z} = re^{-i\theta}$, on a $\bar{z}^2 = r^2e^{-i2\theta}$ donc un argument de $\bar{z}^2$ est -2θ.

Exercice 3 (5 points)

On considère l'équation $z^4 + 2iz^2 - 1 = 0$.

(a) Sans faire de calcul, mais en justifiant soigneusement, donner son nombre de solutions.

Solution:
D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme à coefficients complexes et de degré n admet exactement n racines (non nécessairement distinctes) dans $\mathbb{C}$. Le polynôme $z^4 + 2iz^2 - 1$ est de degré 4, donc admet 4 racines, ce qui signifie que l'équation possède 4 solutions.

(b) Combien y a-t-il de solutions distinctes ?

Solution:
Soit z une solution. Posons $Z = z^2$. Alors Z est une solution de l'équation

$$Z^2 + 2iZ - 1 = 0.$$

On reconnaît ici la forme développée du carré $(Z + i)^2$, donc l'équation ci-dessus admet une unique solution qui est $Z = -i$. Il s'agit d'une racine double. z est donc une racine carrée de $-i$. Comme $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$, ses racines carrées sont $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $-e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Il y a donc deux valeurs possibles pour z : l'équation a deux solutions distinctes.

(c) Calculer la somme des solutions.

Solution:
D'après la question précédente, la somme des solutions vaut

$$S = -e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}} = 0.$$

Exercice 4 (3 points)
Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie ci-dessous est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

$$f : z \mapsto \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z + \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

Solution:
Cherchons un éventuel point fixe z_* de la transformation :

$$\begin{aligned}
& z_* = f(z_*) \\
\Leftrightarrow\quad & z_* = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z_* + \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \\
\Leftrightarrow\quad & z_* \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i \\
\Leftrightarrow\quad & z_* = \frac{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i)(1+i\sqrt{3})}{1+3} \\
\Leftrightarrow\quad & z_* = \frac{4+4i}{4} = 1+i
\end{aligned}$$

donc f admet un unique point fixe, $z_* = 1+i$. On calcule donc

$$\begin{aligned}
f(z) - (1+i) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) z - \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z-(1+i)) \\
&= e^{i\frac{\pi}{3}}(z-(1+i))
\end{aligned}$$

car $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$. On a donc finalement pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = (1+i) + e^{i\frac{\pi}{3}}(z-(1+i)).$$

f est donc la rotation de centre Ω, d'affixe $1+i$, et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 5 (6 points)
Soient $\vec{u} = (1,2,3), \vec{v} = (3,1,2)$ et $\vec{w} = (2,3,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(a) Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Solution:

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{aligned}[t] &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (1-6) - 2 \times (3-4) + 3 \times (9-2) \\ &= 18 \end{aligned}$$

(b) Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils linéairement indépendants ?

Solution:
Comme $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \neq 0$, les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants.

(c) Donner une équation cartésienne du plan engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et passant par le point A de coordonnées $(1, 1, 1)$.

Solution:
Soit Π le plan engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et passant par le point A de coordonnées $(1, 1, 1)$, et M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z). Le point M est dans le plan Π si et seulement si les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont liés, donc on a l'équivalence :

$$M \in \Pi \Longleftrightarrow \det(\vec{v},\vec{w},\overrightarrow{AM}) = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} \det(\vec{v},\vec{w},\overrightarrow{AM}) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & x-1 \\ 1 & 3 & y-1 \\ 2 & 1 & z-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (y-1) \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z-1) \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (x-1) \times (1-6) - (y-1) \times (3-4) + (z-1) \times (9-2) \\ &= -5x + y + 7z - 3, \end{aligned}$$

donc une équation cartésienne du plan Π est :

$$-5x + y + 7z - 3 = 0.$$

(d) Donner un système d'équations cartésiennes de la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$.

Solution:
La droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$ est la droite $\mathbb{R}\vec{u}$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{M \in \mathbb{R}^3 \,|\, \overrightarrow{OM} = t\vec{u}, t \in \mathbb{R}\},$$

dont un système d'équations paramétriques est :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 2t \\ z & = & 3t \end{array} \right.$$

On en déduit un système d'équations cartésiennes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 2x \\ z & = & 3x \end{array}\right.$$

Exercice 6 (4 points (bonus))

Soient x et y deux nombres réels, et n un entiel naturel. Calculer la somme suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(x+ky)$$

Solution:

Soit S la somme demandée. Comme $\sin(x+ky) = \mathrm{Im}(e^{i(x+ky)})$, on a :

$$S = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(x+ky)}\right)$$

Or $e^{i(x+ky)}$=$e^{ix}(e^{iy})^k$ donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(x+ky)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ix}(e^{iy})^k \\ &= e^{ix} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{iy})^k 1^{n-k} \\ &= e^{ix}(e^{iy}+1)^n. \end{aligned}$$

Dans l'avant-dernière ligne de ce calcul on a reconnu la formule du binôme de Newton. D'autre part, $e^{iy}+1 = e^{i\frac{y}{2}}(e^{i\frac{y}{2}} + e^{-i\frac{y}{2}}) = 2e^{i\frac{y}{2}}\cos\frac{y}{2}$, donc finalement :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(x+ky)} = 2^n e^{i(x+\frac{ny}{2})} \cos^n \frac{y}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{Im}\left(2^n e^{i(x+\frac{ny}{2})} \cos^n \frac{y}{2}\right) \\ &= 2^n \mathrm{Im}\left(e^{i(x+\frac{ny}{2})}\right) \cos^n \frac{y}{2} \\ &= 2^n \sin(x+\frac{ny}{2}) \cos^n \frac{y}{2}. \end{aligned}$$