Corrigé

Exercice 1 (4 points)

(a) Donner l'écriture cartésienne des nombres complexes suivants :

i. $z = \frac{1+i}{3+2i}$

ii. $z = \frac{2-i}{(3+2i)^2}$

Solution:

i. $z = \frac{1+i}{3+2i} = \frac{(1+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3+2+3i-2i}{3^2+2^2} = \frac{5}{13} + \frac{1}{13}i$

ii. $z = \frac{2-i}{(3+2i)^2} = \frac{2-i}{9-4+12i} = \frac{(2-i)(5-12i)}{(5+12i)(5-12i)} = \frac{10-12-5i-24i}{5^2+12^2} = \frac{-2}{169} - \frac{29}{169}i$

(b) Donner l'écriture polaire des nombres complexes suivants :

i. $z = 1 + i\sqrt{3}$

ii. $z = 3i(1 + i\sqrt{3})$

Solution:

i. Le module de z vaut $|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ donc tout argument θ de z doit vérifier les égalités $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Le réel $\theta = \frac{\pi}{3}$ convient, donc $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ii. D'après la question précédente, $z = 3i \times 2e^{i\frac{\pi}{3}}$. Comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, on obtient $z = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 6e^{i\frac{5\pi}{6}}$

Exercice 2 (5 points)

(a) Donner les formules d'Euler.

Solution:
Pour tout nombre réel θ, $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

(b) Linéariser $\cos^2\theta\sin\theta$.

Solution:
On exprime $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de $e^{i\theta}$ à l'aide des formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta\sin\theta &= \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2i} \times (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\
&= \frac{1}{8i}(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} + 2)(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\
&= \frac{1}{8i}(e^{i3\theta} - e^{i\theta} + e^{-i\theta} - e^{-i3\theta} + 2e^{i\theta} - 2e^{-i\theta}) \\
&= \frac{1}{8i}(e^{i3\theta} - e^{-i3\theta} + e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\
&= \frac{1}{8i}(2i\sin 3\theta + 2i\sin\theta) \\
&= \frac{\sin 3\theta + \sin\theta}{4}
\end{aligned}$$

(c) Calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$$

Solution:
S est la somme des $2n+1$ premiers termes de la suite géométrique de raison $e^{i\theta}$ dont le premier terme est $e^{-in\theta}$. Si $e^{i\theta} \neq 1$, on peut utiliser la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\begin{aligned} S &= e^{-in\theta}\frac{1-(e^{i\theta})^{2n+1}}{1-e^{i\theta}} = e^{-in\theta}\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}\left(e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta}-e^{i(n+\frac{1}{2})\theta}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} \\ &= e^{-in\theta}e^{in\theta}\frac{-2i\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

Pour passer de la première à la deuxième ligne de ce calcul on a utilisé la formule d'Euler donnée à la première question : $2i\sin x = e^{ix} - e^{-ix}$. Lorsque $e^{i\theta} = 1$, tous les termes de la somme valent 1 donc $S = 2n+1$. En conclusion, on a :

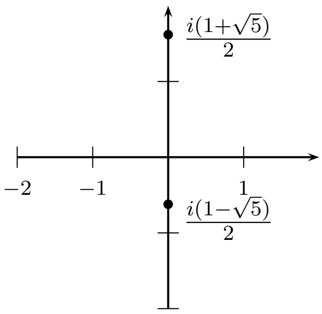
$$S = \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} & \text{si} \quad \theta \neq 0 \quad [2\pi] \\ 2n+1 & \text{si} \quad \theta = 0 \quad [2\pi] \end{cases}$$

Exercice 3 (5 points)

(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - iz + 1 = 0$. Placer la ou les éventuelles solutions sur une figure.

Solution:
Le discriminant vaut $\Delta = (-i)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -1 - 4 = -5$. Il y a donc deux solutions complexes qui valent $z_1 = \frac{i-i\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \frac{i+i\sqrt{5}}{2}$.

$$S = \left\{\frac{i(1-\sqrt{5})}{2}, \frac{i(1+\sqrt{5})}{2}\right\}$$



Remarque : les deux solutions ne sont pas conjuguées l'une de l'autre. Cela aurait été le cas si les coefficients de l'équation avaient été réels.

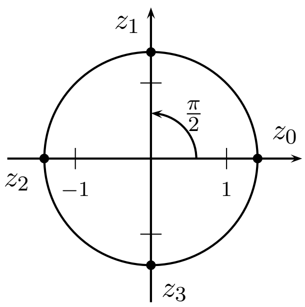
(b) Calculer la somme des racines du polynôme $z^2 - 3z + 7$.

Solution:
La somme des racines du polynôme $aX^2 + bX + C$ vaut $\frac{-b}{a}$. La somme demandée ici vaut donc 3.

(c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 4$. Placer la ou les éventuelles solutions sur une figure.

Solution:
Les solutions de cette équation sont les racines $4^{\text{èmes}}$ du nombre $4 = 4e^{i\times 0}$, c'est-à-dire les nombres $\sqrt[4]{4}e^{i(0+\frac{2k\pi}{4})}$ pour $k = 0, 1, 2$ et 3. Comme $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ et $e^{i(0+\frac{2k\pi}{4})} = e^{ik\frac{\pi}{2}}$, on a :

$$S = \left\{\sqrt{2}e^{i0}, \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}, \sqrt{2}e^{i\pi}, \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}}\right\} = \left\{\sqrt{2}, i\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\right\}$$



Exercice 4 (4 points)
On considère les deux nombres complexes suivants :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad \text{et} \qquad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

(a) Ecrire z_1 et z_2 sous forme cartésienne.

Solution:
$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Calculer le produit z_1z_2 sous forme cartésienne puis sous forme polaire.

Solution:
Sous forme cartésienne, $z_1z_2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Sous forme polaire, $z_1z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{\pi}{12}}$.

(c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Solution:
La question précédente permet de connaître les parties réelles et imaginaires de $e^{i\frac{\pi}{12}}$. On a donc : $\cos\frac{\pi}{12} = \mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{12}}) = \mathrm{Re}(z_1z_2) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, et de même $\sin\frac{\pi}{12} =$

$\mathrm{Im}(e^{i\frac{\pi}{12}}) = \mathrm{Im}(z_1 z_2) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 5 (2 points)

Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, dont l'affixe z vérifie l'équation :

$$\bar{z}(z-1) = z^2(\bar{z}-1)$$

Solution:

Cherchons z sous la forme $z = x + iy$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. L'équation de l'énoncé se reécrit alors :

$$(x-iy)(x-1+iy) = (x+iy)^2(x-iy)$$

Or en développant on obtient

$$\begin{aligned}(x-iy)(x-1+iy) &= x(x-1)+y^2+i(xy-y(x-1))\\ &= x^2+y^2-x+iy\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(x+iy)^2(x-iy) &= (x^2-y^2+2ixy)(x-1-iy)\\ &= (x^2-y^2)(x-1)+2xy^2+i(2xy(x-1)-y(x^2-y^2))\\ &= x^3+xy^2-x^2+y^2+i(x^2y-y^3-2xy)\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en identifiant les parties réelles et imaginaires, que

$$\begin{cases} x^2+y^2-x = x^3+xy^2-x^2+y^2 \\ y = x^2y-y^3-2xy \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x(x^2+y^2-2x+1) = 0 \\ y(x^2-y^2-2x-1) = 0 \end{cases}$$

La première équation entraîne que $x = 0$ ou $x^2+y^2-2x+1 = 0$.

– Premier cas : $x = 0$. Alors la deuxième équation devient

$$y(y^2+1) = 0$$

d'où $y = 0$ car $y^2+1 > 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc $x = y = 0$ et par conséquent $z = 0$.

– Deuxième cas : $x^2+y^2-2x+1 = 0$. Cela se reécrit sous la forme

$$(x-1)^2+y^2 = 0$$

ce qui entraîne $x-1 = 0$ et $y = 0$ car les deux nombres $(x-1)^2$ et y^2 sont toujours positifs ou nuls. On a donc $x = 1$ et $y = 0$ d'ou $z = 1$.

On vérifie réciproquement que $z = 0$ et $z = 1$ sont bien des solutions de l'équation initiale. L'ensemble des solutions est donc :

$$S = \{0, 1\}$$